

香港考試及評核局

2 0 1 3 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

數學 延伸部分
單元一（微積分與統計）

試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

1. 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11、13 及 15 頁之適當位置貼上電腦條碼。
2. 試卷內各題均須作答。答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
3. 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每一紙張均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於簿內。
4. 除特別指明外，所有算式須詳細列出。
5. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。
6. 就定積分而言，不接受用計算機的數值積分功能求得的答案。
7. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
8. 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號

甲部 (50分)

1. (a) 依 u 的降冪次序展開 $\left(u + \frac{1}{u}\right)^4$ 。
- (b) 將 $(e^{ax} + e^{-ax})^4$ 表為 x 的升冪級數至含 x^2 的項。
- (c) 假設(b)的結果中 x^2 的係數為 2。求 a 的所有可取值。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 某城市於時間 t (以年為單位) 的人口 p (以百萬為單位) 可用下式模擬：

$$p = 8 - \frac{2.1}{\sqrt{t+4}}, \text{ 其中 } t \geq 0.$$

一項環境研究顯示，當人口為 p 百萬時，空氣中的二氧化碳濃度為

$$C = 2^p \text{ 單位。}$$

求於 $t=5$ 時空氣中的二氧化碳濃度的變率。

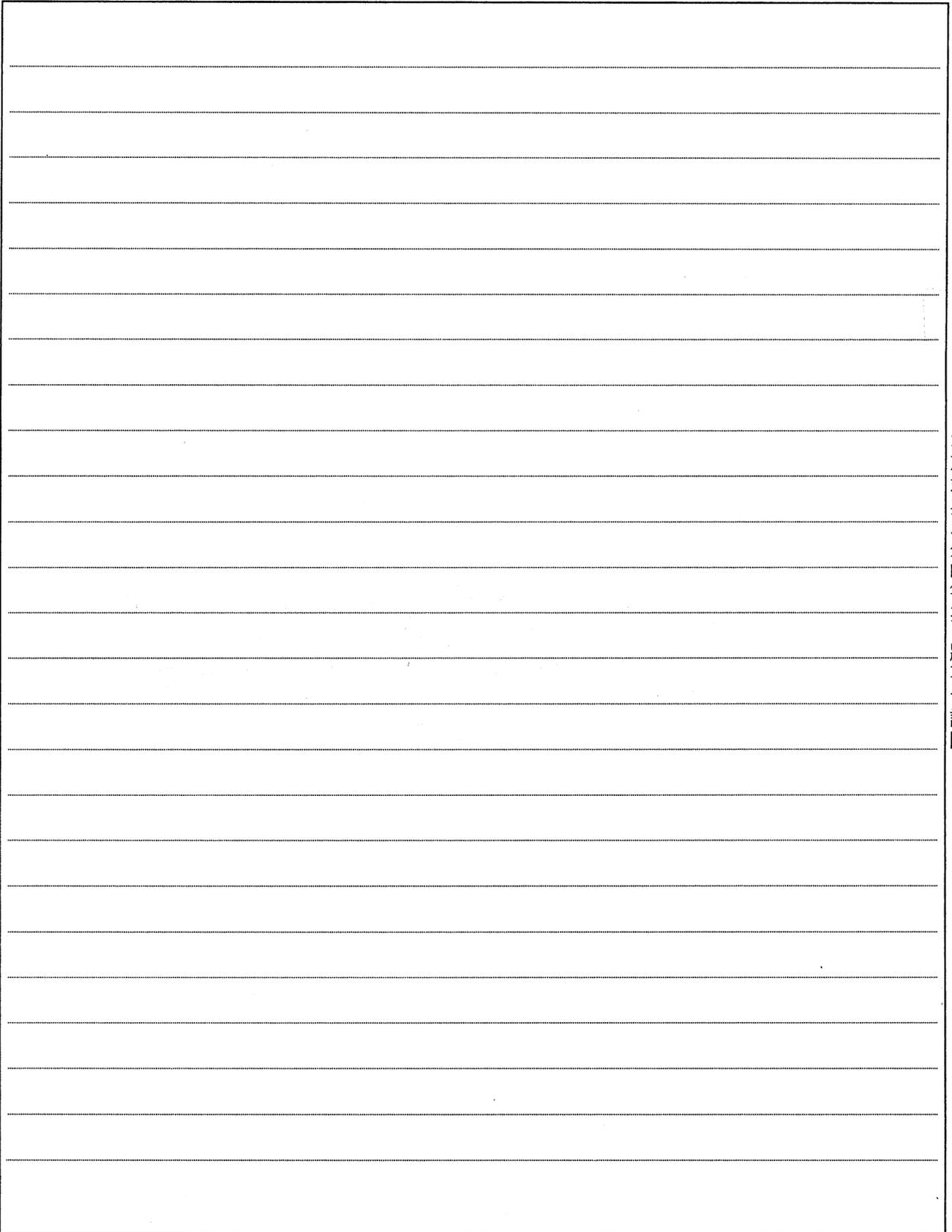
(4分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 考慮曲線 $C: y = x(x-2)^{\frac{1}{3}}$ 和直線 L ，其中 L 通過原點並與 C 於 $x=3$ 的切線平行。

(a) 求 L 的方程。

(b) 求 C 與 L 的兩個交點的 x 坐標。

(c) 求 C 與 L 所圍成區域的面積。

[註：就定積分而言，不接受用計算機的數值積分功能求得的答案。]

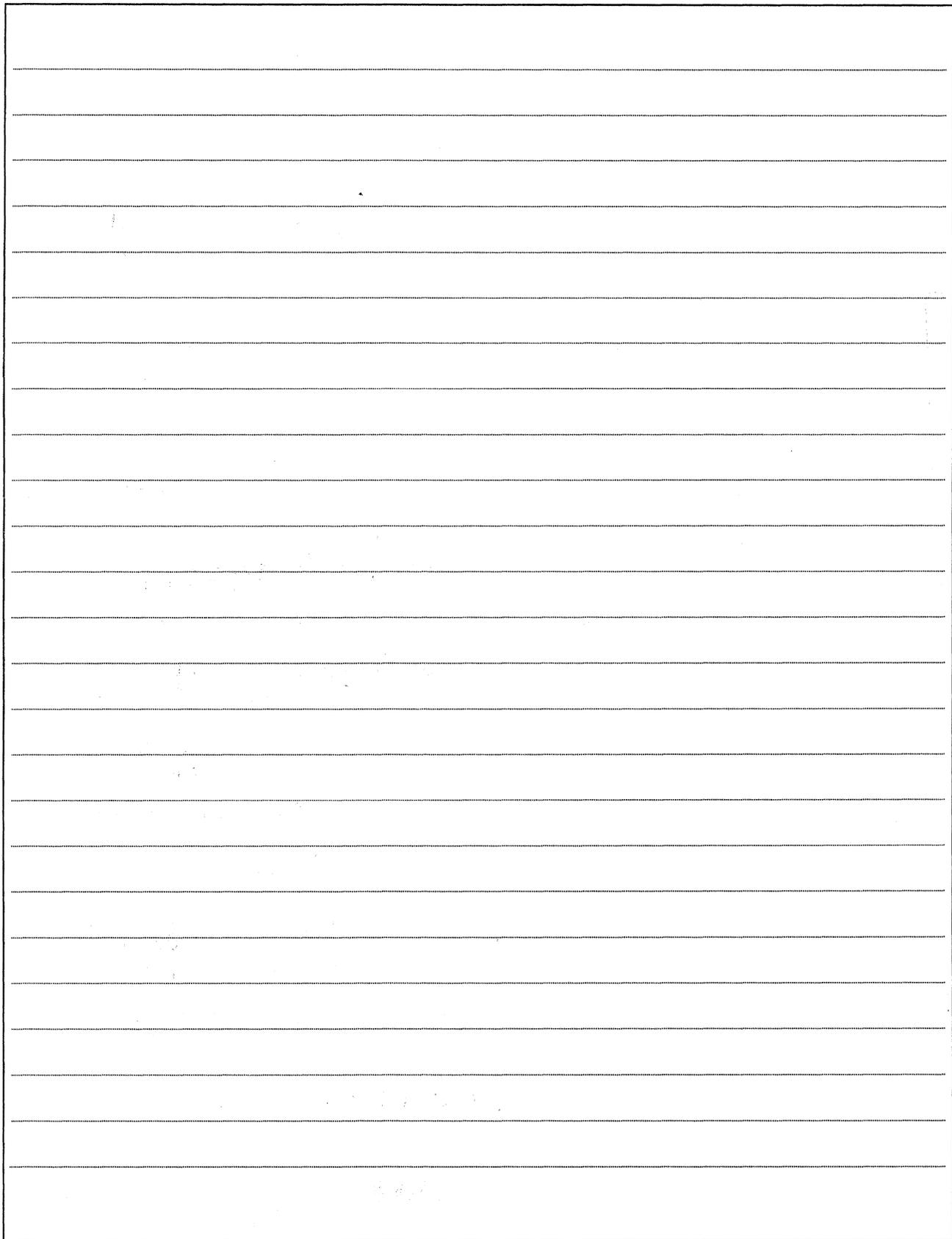
(8分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 某會所推出一項宣傳計劃 x 星期後，會員人數 y (以千為單位) 可用下式模擬：

$$y = \frac{8(1 - ae^{-bx})}{1 + ae^{-bx}}, \text{ 其中 } a \text{ 和 } b \text{ 為正常數且 } x \geq 0.$$

當 $x = 2, 4, 6, 8, 10$ 時， y 的值記錄如下：

x	2	4	6	8	10
y	5.97	6.26	6.75	7.11	7.37

(a) 設 $u = ae^{-bx}$ 。

(i) 將 $\ln u$ 表為 x 的線性函數。

(ii) 求 u ，答案以 y 表示。

(b) 已知上表中有一個 y 值不正確。

(i) 利用第 9 頁的方格紙判斷哪一個 y 值不正確。

(ii) 移除該不正確 y 值，由此估算 a 和 b 的值，答案須準確至 2 位小數。

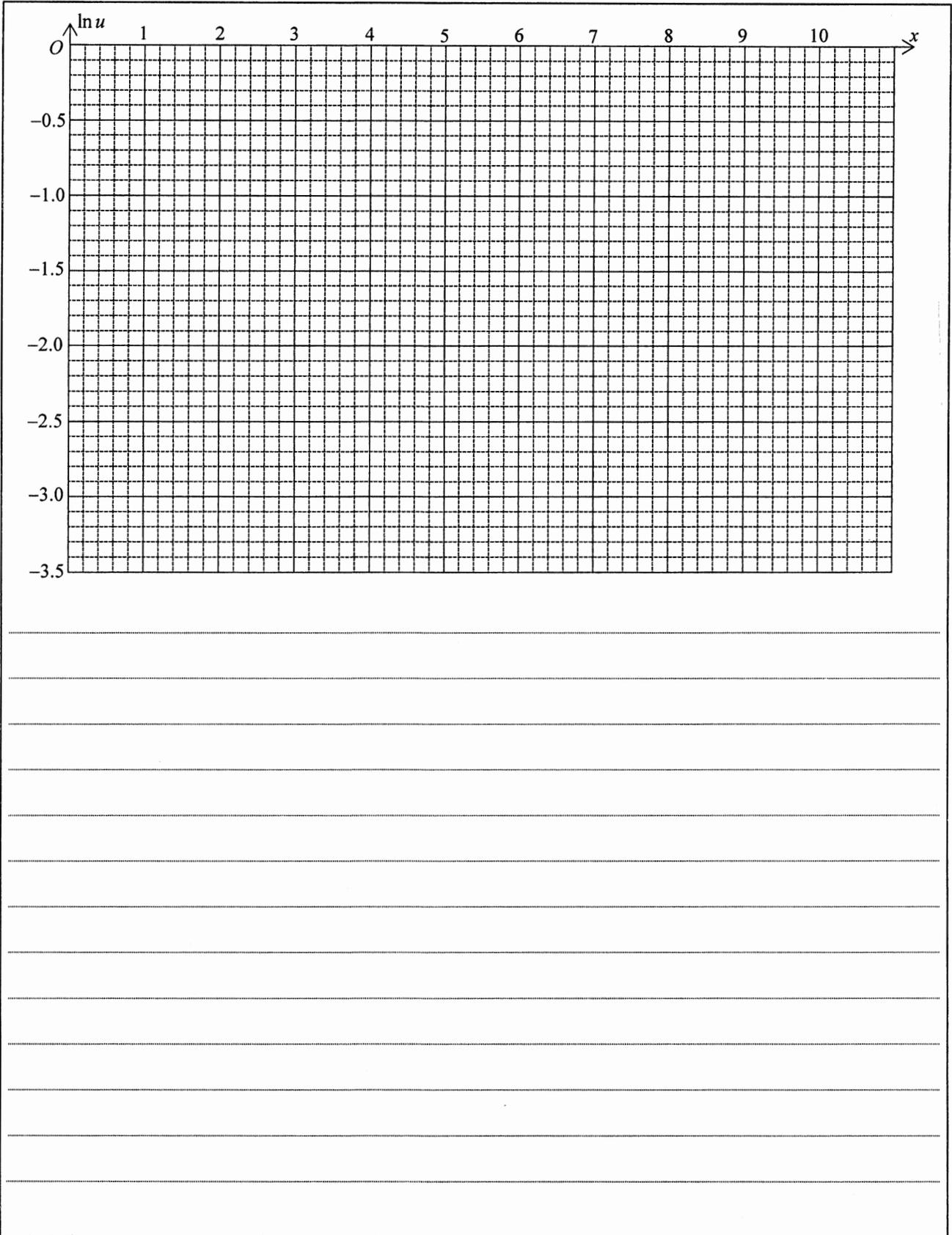
(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 求 $\frac{d}{dx}(x \ln x)$ 。

(b) 利用(a)計算 $\int_1^e \ln x \, dx$ 。

(4分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. 在某沙灘隨機選取 120 名泳客組成一樣本，其中 75 名泳客不滿意沙灘的水質。設 p 為不滿意沙灘水質的泳客在沙灘泳客總體中所佔的比例。求 p 的近似 90% 置信區間。

(4 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 設 X 和 Y 為兩個獨立的離散隨機變量，其概率分佈如下表所示：

x	0	1	3	5	7
$P(X = x)$	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

y	1	2	4	m
$P(Y = y)$	0.4	0.3	0.2	0.1

假設 $E(Y) = 2.4$ 。

- (a) 求 m 的值。
- (b) 設 A 為事件 $X + Y \leq 2$ ， B 為事件 $X = 0$ 。
- (i) 求 $P(A)$ 。
- (ii) 事件 A 與 B 是否獨立？試解釋如何達至你的答案。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 在某製造商生產的發光二極管燈泡中隨機選取一個，其壽命假設為服從平均值為 μ 小時、標準差為 5000 小時的正態分佈。已知 96.41% 的燈泡的壽命少於 39000 小時。

(a) 求 μ 的值。

(b) 假設隨機選取 100 個燈泡組成一樣本。求該樣本的平均壽命介乎於 30200 小時與 30800 小時之間的概率。

(c) 該製造商現欲隨機選取 n 個燈泡組成另一個樣本，使該樣本的平均壽命超過 28500 小時的概率至少為 0.985。求 n 的最小值。

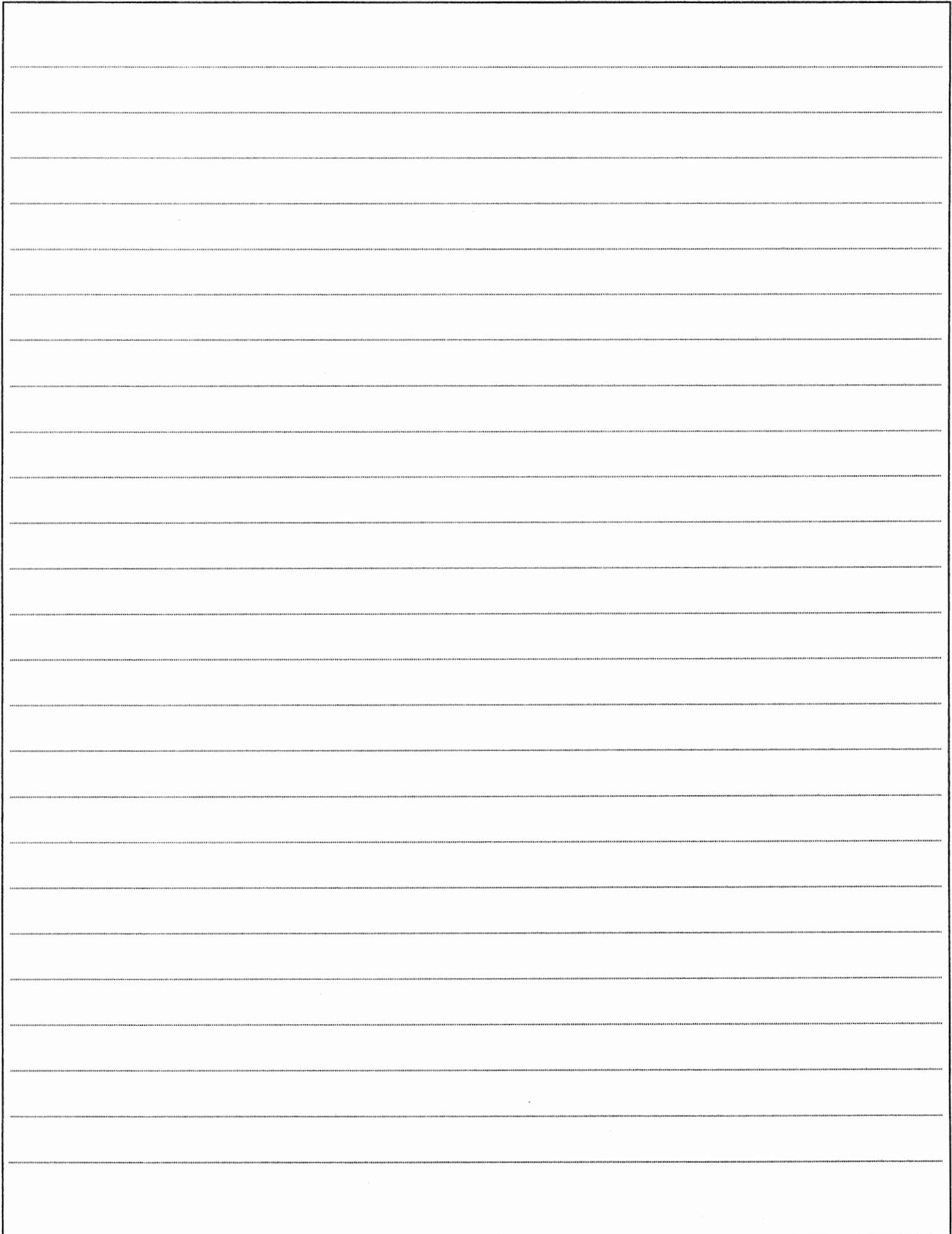
(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50分)

10. (a) 考慮函數 $f(x) = \ln(x^2 + 16) - \ln(3x + 20)$ ，其中 $x > \frac{-20}{3}$ 。

(i) 求 x 值的範圍使 $f(x) < 0$ 。

(ii) 考慮積分 $I = \int_0^4 f(x) dx$ 。

(1) 利用有 4 個子區間的梯形法則，求 I 的估算值。

(2) 判斷(1)中的估算值是過高還是過低。試解釋如何達至你的答案。

(8分)

(b) 某種昆蟲生活於某特定環境中。設 $N(t)$ (以千為單位) 為該昆蟲於時間 t (以月為單位) 的數目。假設當 $N(t) > 0$ 時，可把 $N(t)$ 視為可微函數。當 $N(t) > 0$ 時，昆蟲於時間 t 的出生率和死亡率分別為 $10\ln(t^2 + 16)$ 和 $10\ln(3t + 20)$ 。已知 $N(0) = 8$ 。

(i) 當 $N(t) > 0$ 時，以 t 表 $N'(t)$ 。

(ii) 思晴聲稱該種昆蟲直至 $t = 4$ 時都不會滅絕。你是否同意？試解釋如何達至你的答案。

(4分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 設 $P(t)$ 和 $C(t)$ (採用適當的單位) 分別為某城市在時段 $[0, t]$ 內所生產和消耗的電能, 其中 t 以年為單位, 並且 $t \geq 0$ 。已知 $P'(t) = 4(4 - e^{\frac{-t}{5}})$ 和 $C'(t) = 9(2 - e^{\frac{-t}{10}})$ 。在時段 $[0, t]$ 內產生的多餘電能為 $R(t)$, 其中 $R(t) = P(t) - C(t)$, 並且 $t \geq 0$ 。

(a) 求 t 使得 $R'(t) = 0$ 。

(3 分)

(b) 證明 $R'(t)$ 隨 t 而遞減。

(3 分)

(c) 求在 $R'(t) > 0$ 的時段內產生的多餘電能總量。

(3 分)

(d) 在 $t = 5$ 時, 電能的生產有所改善。設 $Q(t)$ 為時段 $[5, t]$ 內生產的電能, 其中 $t \geq 5$, 並且

$$Q'(t) = \frac{(t+1)[\ln(t^2 + 2t + 3)]^3}{t^2 + 2t + 3} + 9。$$

求在改善電能生產後首 3 年生產的電能總量。

(5 分)

[註：就定積分而言, 不接受用計算機的數值積分功能求得的答案。]

寫於邊界以外的答案, 將不予評閱。

寫於邊界以外的答案, 將不予評閱。

寫於邊界以外的答案, 將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 假設某城市中成人的膽固醇水平(採用適當的單位)服從正態分佈,其平均值為 μ , 方差為 σ^2 。從一個由 49 名成人組成的隨機樣本求得 μ 的 95% 置信區間為 (4.596, 5.044)。

(a) (i) 求 σ 的值。

(ii) 求樣本平均值。

(3 分)

(b) 隨機選取 15 名成人組成另一個樣本, 並記錄他們的膽固醇水平如下:

3.6	3.8	3.9	4.3	4.3	4.5	4.8	5.0
5.1	5.2	5.3	5.5	5.8	6.0	6.4	

現把上述兩個樣本合併。利用合併後的樣本求 μ 的 99% 置信區間。

(4 分)

(c) 某衛生機構把成人的膽固醇水平分為低、中、高三等, 其對應的膽固醇水平分別為不高於 5.2, 介乎於 5.2 與 6.2 之間和不低於 6.2。設 $\mu = 4.8$ 。

(i) 現從該城市隨機選取一名成人, 求該成人的膽固醇為低水平的概率。

(ii) 現從該城市隨機選取 20 名成人組成一樣本。求在該樣本中有超過 17 名成人的膽固醇為低水平, 並有至少 1 名成人的膽固醇為中水平的概率。

(5 分)

寫於邊界以外的答案, 將不予評閱。

寫於邊界以外的答案, 將不予評閱。

寫於邊界以外的答案, 將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. 某升降機公司在每個月月初為某屋邨的所有升降機提供定期保養服務。設一台升降機在一個月內的故障數目服從平均值為 1.9 的泊松分佈。

假設該屋邨共有 15 台升降機。若某台升降機在某個月進行定期保養後於該月發生故障多於 2 次，則該升降機在該月的定期保養服務便會被視為不可接受。假設所有升降機每月發生故障的數目相互獨立。

(a) 求某月內該屋邨某台隨機選取的升降機的定期保養服務不可接受的概率。
(2 分)

(b) 就某台升降機而言，求 2014 年 6 月為在 2014 年內第三個該升降機的定期保養服務不可接受的月份的概率。
(2 分)

(c) 求該屋邨在一年內所有不可接受的升降機定期保養服務總數的期望值。
(2 分)

(d) 為保證升降機公司的保養服務質量，屋邨管理處在 15 台升降機的新保養合約中加入以下條款，由 2015 年 1 月 1 日起生效：

就每台升降機而言，如果在新合約期內連續 3 個月的定期保養服務不可接受，倘屋邨管理處在之前未曾就該台升降機發出警告信，屋邨管理處會立即向升降機公司發出一封警告信。

(i) 就某台隨機選取的升降機而言，求屋邨管理處會在 2015 年 4 月 30 日或之前向升降機公司發出警告信的概率。

(ii) 求屋邨管理處會在 2015 年 4 月 30 日或之前向升降機公司發出 3 封或以上警告信的概率。
(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a small margin at the top and bottom.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

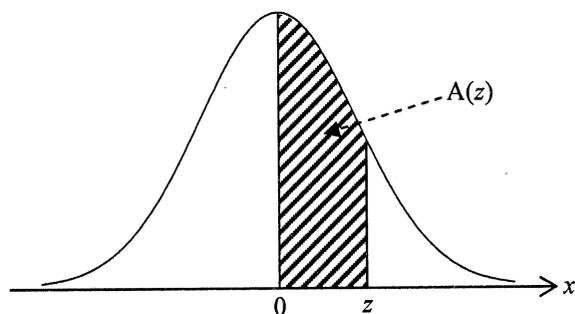
試卷完

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註：本表所列數字為標準正態曲線下由 $x=0$ 至 $x=z$ ($z \geq 0$) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$