評卷參考

單元一（微積分與統計）

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生以及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

一般閱卷原則

1. 評卷時，閱卷員須跟循評卷參考的評分標準給分，這是十分重要的。很多時考生會運用評卷參考以外的方法而得到正確答案，一般來說，只要運用合理的方法而取得正確答案，該考生應可獲得該部分的**所有分數**（除題目特別指明特定方法外）。閱卷員應有耐性地評閱評卷參考以外的解題方法。

2. 在評卷參考中，分數會分為下列三類：

「M」分	使用正確方法的得分；
「A」分	正確答案的得分；
沒有「M」或「A」的分	正確地完成證題或推演得題目所給的答案的得分。

某些題目由數部分組成，而較後部分的答案卻需依賴較前部分所得的結果。在這情況下，若考生因為前部分錯誤的結果而導致後部分的答案錯誤，但卻能運用正確的方法去解題，則方法正確的步驟可給「M」分，而相應的答案將沒有「A」分（除特別指明外）。

3. 為方便閱卷員評卷，評卷參考已盡量詳盡。當然，考生的答案多不會如評卷參考般清楚列寫出來，諸如欠缺某幾個步驟或將步驟隱含於字裏行間。如遇到類似情況，閱卷員應運用他們的專業知識去判斷是否給分。一般來說，如考生的答案顯示他已運用相關的概念或技巧，則該部分應予給分。

4. 評卷時遇有不清楚的地方，應以考生的利益為依歸。

5. 評卷參考中，塗上陰影的部分代表可省略的步驟，有外框的部分代表運用不同方法的答案。所有分數答案必須化簡。

6. 除在題目中特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。未達所需準確度的答案均不被接受。

解	分	備註
1. (a) $k^2+0.16+0.18+0.3+k+0.12=1$	1M	
$k^2+k-0.24=0$		
$k=0.2$ 或 $k=-1.2$ （捨去）	1A	
因此，可得 $k=0.2$ 。		
(b) $\mathrm{E}(X)$		
$=0(0.04)+2(0.16)+4(0.18)+5(0.3)+8(0.2)+9(0.12)$	1M	
$=5.22$	1A	
(c) $\mathrm{Var}(2-3X)$		
$=9\mathrm{Var}(X)$		
$=9((0-5.22)^2(0.04)+(2-5.22)^2(0.16)+(4-5.22)^2(0.18)$		
$+(5-5.22)^2(0.3)+(8-5.22)^2(0.2)+(9-5.22)^2(0.12))$	1M	
$=56.6244$	1A	
$\mathrm{Var}(2-3X)$		
$=9\mathrm{Var}(X)$		
$=9(\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2)$		
$=9(33.54-(5.22)^2)$	1M	
$=56.6244$	1A	
	----------(6)	
2. (a) $\mathrm{P}(B\mid A)$		
$=\dfrac{\mathrm{P}(A\mid B)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$		
$=\dfrac{\mathrm{P}(A\mid B)(1-\mathrm{P}(B'))}{\mathrm{P}(A)}$		
$=\dfrac{0.6(1-0.7)}{0.2}$	1M	
$=0.9$	1A	
(b) $\mathrm{P}(A\cap B)$		
$=\mathrm{P}(A\mid B)\mathrm{P}(B)$		
$=\mathrm{P}(A\mid B)(1-\mathrm{P}(B'))$		
$=0.6(1-0.7)$		
$=0.18$		
$\neq 0$	1M	
因此，A 與 B 不是互斥。	1A	必須顯示理由
(c) 留意 $\mathrm{P}(A\mid B)=0.6\neq 0.2=\mathrm{P}(A)$ 。	1M	
因此，A 與 B 不是獨立。	1A	必須顯示理由
留意 $\mathrm{P}(A\cap B)=0.18\neq 0.06=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 。	1M	
因此，A 與 B 不是獨立。	1A	必須顯示理由
	----------(6)	

解	分	備註
3. (a) μ		
$=\dfrac{1.83+3.43}{2}$		
$=2.63$	1A	
$\mathrm{P}\left(\dfrac{1.83-2.63}{\sigma}<Z<\dfrac{3.43-2.63}{\sigma}\right)=0.8904$	1M	
$\mathrm{P}\left(\dfrac{-0.8}{\sigma}<Z<\dfrac{0.8}{\sigma}\right)=0.8904$		
$\mathrm{P}\left(0<Z<\dfrac{0.8}{\sigma}\right)=0.4452$		
$\dfrac{0.8}{\sigma}=1.6$		
$\sigma=0.5$	1A	
(b) 所求的概率		
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{2.5-2.63}{\frac{0.5}{\sqrt{9}}}<Z<\dfrac{3.1-2.63}{\frac{0.5}{\sqrt{9}}}\right)$	1M	
$=\mathrm{P}(-0.78<Z<2.82)$		
$=0.2823+0.4976$		
$=0.7799$	1A	
	----------(5)	
4. (a) 所求的概率		
$=(1-0.6)^3(0.6)$	1M	給 $(1-p)^3p$, $0<p<1$
$=0.0384$	1A	
(b) $1-(1-0.6)^{10-k}>0.95$	1M	給 $1-(1-q)^{10-k}$, $0<q<1$
$0.4^{10-k}<0.05$		
$\log(0.4^{10-k})<\log 0.05$	1M	
$k<6.730587608$		
因此， k 的最大值為 6 。	1A	
(c) 金額的期望值		
$=15\left(\dfrac{1}{0.6}\right)$	1M	給 $15\left(\dfrac{1}{r}\right)$, $0<r<1$
$=\$25$	1A	
	----------(7)	

解	分	備註
5. (a) $(1+e^{3x})^2$		
$=1+2e^{3x}+e^{6x}$	1M	
$=1+2\left(1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\cdots\right)+\left(1+6x+\frac{(6x)^2}{2!}+\cdots\right)$	1M	給展開 e^{3x} 或 e^{6x}
$=4+12x+27x^2+\cdots$	1A	
$(1+e^{3x})^2$		
$=\left(1+1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\cdots\right)^2$	1M	給展開 e^{3x}
$=(2)(2)+(2)(2)(3x)+(3x)(3x)+(2)(2)\left(\frac{9x^2}{2}\right)+\cdots$	1M	
$=4+12x+27x^2+\cdots$	1A	
(b) $(5-x)^4$		
$=5^4-C_1^4(5^3)x+C_2^4(5^2)x^2-C_3^4(5)x^3+x^4$	1M	
$=625-500x+150x^2-20x^3+x^4$		
所求的係數		
$=(625)(27)+(-500)(12)+(150)(4)$	1M	保留不給 1M 若遺漏步驟
$=11475$	1A	
	----------(6)	
6. (a) $f(6)=-33$		
$4(6^3)+m(6^2)+n(6)+615=-33$	1M	
$6m+n=-252$		
$f'(x)=12x^2+2mx+n$		
$f'(6)=0$		
$12(6^2)+2m(6)+n=0$	1M	
$12m+n=-432$		
求解後，可得 $m=-30$ 及 $n=-72$ 。	1A	給兩項正確
(b) $f'(x)=12x^2-60x-72$		
當 $x=-1$ 或 $x=6$ 時， $f'(x)=0$ 。	1M	
(見下表)	1M	給測試
因此，極小值為 -33 及極大值為 653 。	1A	給兩項正確
	----------(6)	

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,6)$	6	$(6,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	653	↘	-33	↗

解	分	備註
7. (a) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$		
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{x-2}-x\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{\frac{-1}{2}}}{x-2}$	1M	給商法則
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-4}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}$	1A	
(b) 設 (h, k) 為切點的坐標。		
故此，這切線的斜率為 $\dfrac{h-4}{2(h-2)^{\frac{3}{2}}}$ 。		
$\dfrac{k-0}{h-9}=\dfrac{h-4}{2(h-2)^{\frac{3}{2}}}$	1M+1A	1M給利用 (a)
$\dfrac{h}{\sqrt{h-2}}2(h-2)^{\frac{3}{2}}=(h-4)(h-9)$		
$h^2+9h-36=0$	1M	
$h=3$ 或 $h=-12$ （捨去）		
這切線的斜率		
$=\dfrac{3-4}{2(3-2)^{\frac{3}{2}}}$	1M	
$=\dfrac{-1}{2}$	1A	
	----------(7)	
8. (a) 設 $u=\ln x$ 。	1M	
故此，可得 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$ 。		
$\int g(x)dx$		
$=\int\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)\right)dx$		
$=\int\left(\dfrac{1}{x}(1-\ln x)\right)dx$		
$=\int(1-u)du$	1M	
$=u-\dfrac{1}{2}u^2+$常數		
$=\ln x-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+$常數	1A	

解	分	備註
設 $u=\ln\left(\frac{e}{x}\right)$ ，	1M	
則可得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{x}$ 。		
$\int \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$		
$=\int\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e}{x}\right)\right)\mathrm{d}x$		
$=\int -u\,\mathrm{d}u$	1M	
$=\frac{-1}{2}u^2+$常數		
$=\frac{-1}{2}\left(\ln\left(\frac{e}{x}\right)\right)^2+$常數	1A	
(b) (i) e	1A	
(ii) 所求的面積		
$=\int_1^e \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x+\int_e^{e^2}-\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$	1M	
$=\left[\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e+\left[-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_e^{e^2}$ （藉 (a)）	1M	給利用 (a)
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$		
$=1$	1A	
所求的面積		
$=\int_1^e \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x+\int_e^{e^2}-\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$	1M	
$=\left[\frac{-1}{2}\left(\ln\left(\frac{e}{x}\right)\right)^2\right]_1^e+\left[\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{e}{x}\right)\right)^2\right]_e^{e^2}$ （藉 (a)）	1M	給利用 (a)
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$		
$=1$	1A	
	----------(7)	

解	分	備註
9. (a) (i) 樣本平均值		
$=\dfrac{(0.75)(11)+(1.25)(13)+(1.75)(8)+(2.25)(5)+(2.75)(3)}{40}$		
$=1.45$ 小時	1A	
μ 的 90% 置信區間		
$=\left(1.45-1.645\left(\dfrac{0.4}{\sqrt{40}}\right), 1.45+1.645\left(\dfrac{0.4}{\sqrt{40}}\right)\right)$	1M+1A	1A 給 1.645
$\approx(1.3460\,,\,1.5540)$	1A	接受答案準確至 (1.3460，1.5540)
(ii) 設 n 為樣本容量。		
$2(2.17)\left(\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}\right)\leq 0.3$	1M+1A	1A 給 2.17
$n\geq 33.48551111$		
因此，最小樣本容量為 34 。	1A	
	----------(7)	
(b) (i) 所求的概率		
$=\mathrm{P}\left(Z>\dfrac{2-1.48}{0.4}\right)$	1M	
$=\mathrm{P}(Z>1.3)$		
$=0.5-0.4032$		
$=0.0968$	1A	
(ii) 所求的概率		
$=\dfrac{C_1^9(1-0.0968)^8(0.0968)^2}{1-(1-0.0968)^{15}-C_1^{15}(1-0.0968)^{14}(0.0968)}$	1M+1M+1M	1M 給利用 (b)(i) + 1M 給分子 + 1M 給分母
≈ 0.086102962		
≈ 0.0861	1A	接受答案準確至 0.0861
	----------(6)	

解	分	備註
10. (a) 所求的概率		
$=\frac{2^0e^{-2}}{0!}+\frac{2^1e^{-2}}{1!}+\frac{2^2e^{-2}}{2!}+\frac{2^3e^{-2}}{3!}+\frac{2^4e^{-2}}{4!}$	1M+1M	1M給 5個情況 + 1M給泊松概率
≈ 0.947346982		
≈ 0.9473	1A ----------(3)	接受答案準確至 0.9473
(b) 所求的概率		
$=\frac{2^3e^{-2}}{3!}(3(0.25)^2(0.1)+3(0.25)(0.2)^2+3(0.45)^2(0.2))$	1M+1M	1M給泊松概率 + 1M給任何一項正確
≈ 0.030721109		
≈ 0.0307	1A ----------(3)	接受答案準確至 0.0307
(c) 所求的概率		
$=4(0.25)^3(0.1)+6(0.25)^2(0.2)^2+(4)(3)(0.45)^2(0.2)(0.25)+(0.45)^4$	1M+1M	1M給任何一項正確 + 1M給任何三項正確
$=0.18375625$		
≈ 0.1838	1A ----------(3)	接受答案準確至 0.1838
(d) 所求的概率		
$\approx\frac{\left(\frac{2e^{-2}}{1!}\right)(0.1)+\left(\frac{2^2e^{-2}}{2!}\right)(2(0.25)(0.1)+(0.2)^2)+0.030721109+\left(\frac{2^4e^{-2}}{4!}\right)(0.18375625)}{0.947346982}$	1M+1M	1M給分子利用 (b)或(c) + 1M給分母利用 (a
≈ 0.10421488		
≈ 0.1042	1A ----------(3)	接受答案準確至 0.1042

解	分	備註
11. (a) 根據佩玲的建議，		
I		
$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1-0.5}{5}\right)(f(0.5)+f(1)+2(f(0.6)+f(0.7)+f(0.8)+f(0.9)))$	1M	
≈ 0.747559672		
≈ 0.7476	1A	接受答案準確至 0.7476
根據志偉的建議，		
I		
$\approx \int_{0.5}^{1}\left(\frac{1}{x}+0.1+0.005x\right)dx$	1M	
$=\left[\ln x+0.1x+0.0025x^2\right]_{0.5}^{1}$	1M	
$=\ln 2+0.051875$	1A	接受答案準確至 0.7450
≈ 0.74502218		
≈ 0.7450		
	----------(5)	
(b) $f(x)$		
$=\frac{e^{0.1x}}{x}$		
$f'(x)$		
$=\frac{0.1e^{0.1x}}{x^2}(x-10)$	1M	
對 $0.5\le x\le 1$ ，		
$f''(x)$		
$=\frac{0.01e^{0.1x}}{x^3}(x^2-20x+200)$	1A	
$=\frac{0.01e^{0.1x}}{x^3}((x-10)^2+100)$	1M	
>0		
因此，佩玲建議的估計值是過高。	1A	必須顯示理由
$e^{0.1x}=1+0.1x+\frac{(0.1x)^2}{2!}+\frac{(0.1x)^3}{3!}+\cdots$	1M	
對 $0.5\le x\le 1$ ， $e^{0.1x}>1+0.1x+0.005x^2$		
$I>\int_{0.5}^{1}\left(\frac{1}{x}+0.1+0.005x\right)dx$		
因此，志偉建議的估計值是過低。	1A	必須顯示理由
	----------(6)	
(c) $0.7450<I<0.7476$	1M	
$-0.0010<I-0.746<0.0016$		
故此，可得 $-0.002<I-0.746<0.002$ 。		
因此，同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
$I-0.746<0.7476-0.746=0.0016$	1M	
$0.746-I<0.746-0.7450=0.0010$		
故此， I 與 0.746 之差小於 0.002 。		
因此，同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
	----------(2)	

解	分	備註
12. (a) (i) $x-4=\dfrac{3k}{2^{\lambda t}-k}$		
$x-1=\dfrac{3(2^{\lambda t})}{2^{\lambda t}-k}$		
$(x-4)(x-1)=\dfrac{9k2^{\lambda t}}{(2^{\lambda t}-k)^2}$	1A	
(ii) $\dfrac{9k2^{\lambda t}}{(2^{\lambda t}-k)^2}>0$ （由於 $k>0$ ）		
$(x-4)(x-1)>0$ （藉 (a)(i)）	1M	
$x>4$ 或 $x<1$		
因此，該宣稱正確。	1A	必須顯示理由
	----------(3)	
(b) (i) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-3(\ln 2)k\lambda 2^{\lambda t}}{(2^{\lambda t}-k)^2}$	1A	
$\dfrac{-\ln 2}{24}(x-4)(x-1)=\dfrac{-3(\ln 2)k2^{\lambda t}}{8(2^{\lambda t}-k)^2}$		
$\lambda=\dfrac{1}{8}$	1	
(ii) (1) 當 $t=0$ 時， $x=0.8$ 。		
$-3.2=\dfrac{3k}{1-k}$		
$k=16$	1A	
當 $x=0$ 時，可得 $4+\dfrac{48}{2^{\frac{t}{8}}-16}=0$ 。	1M	任何一項
故此，可得 $2^{\frac{t}{8}}=4$ 。	1M	任何一項
求解後，可得 $t=16$ 。		
因此，需時 16 年該湖中的鱷魚便會絕種。	1A	
(2) 當 $t=0$ 時， $x=7$ 。		
$3=\dfrac{3k}{1-k}$		
$k=0.5$	1A	
當 $x=0$ 時，可得 $4+\dfrac{1.5}{2^{\frac{t}{8}}-0.5}=0$ 。		
故此，可得 $2^{\frac{t}{8}}=0.125$ 。		
由於對 $t>0$ ， $2^{\frac{t}{8}}>1$ ，所以這是不可能。		
因此，該湖中的鱷魚永不會絕種。	1A	必須顯示理由
留意 $\lim\limits_{t\to\infty}x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(4+\dfrac{1.5}{2^{\frac{t}{8}}-0.5}\right)=4$ 。		
經過一段很長時間後，該湖中的鱷魚的估計數目為 4 000 。	1A	
	----------(9)	