香港中學文憑考試
Hong Kong Diploma of Secondary Education Examination

數學 延伸部分

2024
試題專輯

（附評卷參考及考生表現評論）

香港考試及評核局
Hong Kong Examinations and Assessment Authority

目　錄

頁數

前言

本專輯詳列 2024 年香港中學文憑考試數學科延伸部分的考試資料，包括考試目標、內容及形式、試題及評卷參考，以及試卷主席對考生表現的評語等。

香港考試及評核局出版此類專輯，旨在提供有用的考試資料，俾教師教學及學生研習時參考之用。2024年香港中學文憑考試其他科目的試題專輯亦已出版。此外，香港考試及評核局為學校、考生和公眾人士製作了一系列與香港中學文憑考試相關的刊物與資源以資參考。有關資料包括考試行政安排、評核要求、相關考試數據，以及對學校和其他持份者的回饋等，詳情請瀏覽本局網頁

(http://www.hkeaa.edu.hk/tc/HKDSE/info_corner/hkdse_publications_materials/)。

本年度公開考試得以順利完成，端賴參與編製試題及評核工作的人士鼎力襄助，本局謹致以至深的謝忱。

考試範圍

考試目標

延伸部分單元一（微積分與統計）的評核目標旨在測驗考生：

1. 對課程及評估指引中微積分與統計學概念、原理及方法的理解；及
2. 採用適當的微積分與統計學技巧以解決多樣問題之能力。

延伸部分單元二（代數與微積分）的評核目標旨在測驗考生：

1. 對課程及評估指引中代數與微積分概念、原理及方法的理解；及
2. 採用適當的代數與微積分技巧以解決多樣問題之能力。

課程內容撮要

詳細內容請參閱課程發展議會與本局聯合編訂的《數學課程及評估指引（中四至中六）》。

單元一（微積分與統計）

1. 二項展式
2. 指數函數和對數函數
3. 函數的導數
4. 函數的求導法
5. 二階導數
6. 求導法的應用
7. 不定積分法及其應用
8. 定積分法及其應用
9. 運用梯形法則計算定積分的近似值
10. 條件概率和貝葉斯定理
11. 離散隨機變量
12. 概率分佈、期望值和方差
13. 二項分佈
14. 泊松分佈
15. 二項分佈和泊松分佈的應用
16. 正態分佈的基本定義及其性質
17. 正態變量的標準化及標準正態分佈表的運用
18. 正態分佈的應用
19. 抽樣分佈和點估計
20. 總體平均值的置信區間
21. 探索與研究

單元二（代數與微積分）

1. 奇函數和偶函數
2. 數學歸納法
3. 二項式定理
4. 續三角函數
5. *e* 的簡介
6. 極限
7. 求導法
8. 求導法的應用
9. 不定積分法及其應用
10. 定積分法
11. 定積分法的應用
12. 行列式
13. 矩陣
14. 線性方程組
15. 向量的簡介
16. 純量積與向量積
17. 向量的應用
18. 探索與研究

此外，考生須具有必修部分和中一至中三數學科課程中基礎部分及非基礎部分的知識。

試卷形式

單元一（微積分與統計）
本單元只考一試卷，時間為兩小時三十分鐘。本卷分為兩部，全部題目均須作答。甲部（佔 50 分）包括八題至十二題短題目。乙部（佔 50 分）包括三題至五題長題目。

單元二（代數與微積分）
本單元只考一試卷，時間為兩小時三十分鐘。本卷分為兩部，全部題目均須作答。甲部（佔 50 分）包括八題至十二題短題目。乙部（佔 50 分）包括三題至五題長題目。

2024-DSE
數學 延伸部分
單元一

請在此貼上電腦條碼

香 港 考 試 及 評 核 局
2 0 2 4 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

考生編號 | | | | | | | | |

數學 延伸部分
單元一（微積分與統計）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
(上午八時三十分至上午十一時)

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9 及 11 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。

(七) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A031C001

甲部（50 分）

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 a 及 b 均為常數使得 $6<b<15$ 。

x	0	3	6	b	15
$\mathrm{P}(X=x)$	0.3	a	0.1	0.2	0.2

已知 $\mathrm{Var}(5X)=739$ 。

(a) 求 a 及 b 。

(b) 設 C 為事件 $0<X\leq 7$ 。

(i) 設 D 為事件 $4<X\leq 15$ 。 C 與 D 是否獨立？ 解釋你的答案。

(ii) 設 E 為一事件使得 $\mathrm{P}(E)\neq 0$ 。 若 C 與 E 互斥， 寫出 $\mathrm{P}(E)$ 的最大可取值。

(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 在一樂團中 $\frac{3}{5}$ 的成員佩戴眼鏡。 在男成員當中，有 $\frac{4}{9}$ 佩戴眼鏡。 隨機選出的一名成員是沒有佩戴眼鏡的女性的概率為 $\frac{3}{20}$ 。

(a) 已知隨機選出的一名成員沒有佩戴眼鏡，求該成員是女性的概率。

(b) 求隨機選出的一名成員是佩戴眼鏡的女性的概率。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

3. 投擲一枚硬幣，擲得字的概率為 p， 其中 $0<p<1$。 當投擲該硬幣 20 次時，擲得 1 次字的概率與擲得 3 次字的概率之比為 49 : 57。

(a) 求 p。

(b) 投擲該硬幣 k 次。 求 k 的最小值使擲得至少 1 次字的概率大於 0.85。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 某校各學生每星期的溫習時間依循一平均值為 μ 小時的正態分佈。 從該校隨機選取一個 81 名學生的樣本。 這些學生每星期的溫習時間之平均值及標準差分別為 13 小時及 1.75 小時。

(a) μ 的 $\beta\%$ 置信區間的寬度為 0.7。 求 β。

(b) 已知該樣本中有 36 名男生，且這些男生每星期的溫習時間之平均值及標準差分別為 12.5 小時及 2 小時。 求該樣本中女生每星期的溫習時間之標準差。

[提示：樣本標準差為 $\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2\right)}$ 。]

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

5. 設 n 為一正數。

(a) 依 x 的升冪次序展開 $\frac{2}{e^{nx}}$ 至含 x^3 的項為止。

(b) 考慮 $(1+4x)^m+\frac{2}{e^{nx}}$ 的展開式，其中 m 為一正整數。已知該展開式中 x 及 x^2 的係數分別為 24 及 980。求該展開式中 x^3 的係數。

(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 設 $e^u = (x^2 + x + e)^{2x+1}$ 。

(i) 將 u 表為 $\mathrm{p}(x)\ln(\mathrm{q}(x))$ 的形式，其中 $\mathrm{p}(x)$ 及 $\mathrm{q}(x)$ 均為多項式。

(ii) 以 x 表 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u$ 。

(b) 曲線 Γ 的方程為 $y = (x^2 + x + e)^{2x+1}$ 。將 Γ 與 y 軸的交點記為 H。求 Γ 在 H 的切線的方程。

(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

7. 某電腦程式調整一長方形數碼圖片的長及闊，使得其對角線的長度維持不變，而其闊以恆速率 $0.5\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}$ 減少。初始時，該圖片的長及闊分別為 20 cm 及 15 cm。把該圖片的闊記為 x cm。求當 $x=7$ 時該圖片的面積的變率。 (4 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. (a) 利用第 24 頁的標準正態分佈表，計算 $\int_0^{0.5} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ 。

(b) 考慮曲線 C ： $y=(2x-1)e^{\frac{-x^2}{2}}$ ，其中 $x \geq 0$ 。 利用 (a) 的結果，求 C 、 x 軸與 y 軸圍成的區域的面積。

(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

9. 某大市場內每個南瓜的重量依循一平均值為 μ kg 及標準差為 σ kg 的正態分佈。 已知該市場內 30.85% 的南瓜每個重量均多於 5.7 kg，而 78.88% 的南瓜每個重量均介乎 $(\mu - 1.5)$ kg 與 $(\mu + 1.5)$ kg 之間。

(a) 求 μ 及 σ 。 (3 分)

(b) 假定在該市場內隨機選取 16 個南瓜。 求這些南瓜的平均重量不超過 5.4 kg 的概率。 (2 分)

(c) 下表顯示該市場內的南瓜的等級及價錢。

一個南瓜的重量（W kg）	$W \leq 3.6$	$3.6 < W \leq 5.7$	$W > 5.7$
等級	C	B	A
價錢（$）	50	80	100

假定在該市場內隨機選取 8 個南瓜並把這些南瓜放進一手推車內。

(i) 求手推車內該些南瓜價錢的期望值。

(ii) 求手推車內有至少 5 個 B 等級的南瓜及至少 1 個 A 等級的南瓜的概率。 (6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. 一派遞員每天均派送貨物。 每天派送延誤的數目依循一平均值為 1.6 的泊松分佈。 若某天延誤的數目少於 3， 則當天稱為*順利*。

(a) 求某天為*順利* 的概率。 (2 分)

(b) 求某星期內全部 7 天均為*順利* 的概率。 (2 分)

(c) 已知某星期內全部 7 天均為*順利*，求該星期內恰有 10 次延誤的概率。 (4 分)

(d) 已知某星期內有至少 2 天沒有延誤，求該星期內全部 7 天均為*順利* 的概率。 (4 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 某天 M 城的累積雨量以每小時 P mm 的速率增加。 已知

$$P = a(-t^2 + 10t + 8)e^{bt} ,$$

其中 a 及 b 均為常數，且 t（$0 \le t \le 4$）為自當天上午 7 時起計所經過的時數。得知 $\ln\left(\frac{P}{-t^2+10t+8}\right)$ 為 t 的線性函數，且這線性函數的圖像通過點 $(3, -0.1)$ 及水平軸上的截距為 2.5 。

(a) 將 $\ln\left(\frac{P}{-t^2+10t+8}\right)$ 表為 t 的線性函數。 (1 分)

(b) 求 a 及 b 的真確值。 (3 分)

(c) 利用梯形法則將區間分成 4 個子區間，估計 M 城當天由上午 7 時至上午 11 時的累積雨量。 (2 分)

(d) 同一天 N 城的累積雨量以每小時 Q mm 的速率增加。 已知

$$Q = \frac{16(2t+5)e^{0.4t}}{4te^{0.4t}+3} ,$$

其中 t（$0 \le t \le 4$）為自當天上午 7 時起計所經過的時數。

(i) 求 $\int Q\,\mathrm{d}t$ 。

(ii) 某人宣稱 M 城與 N 城當天由上午 7 時至上午 11 時的累積雨量之和大於 160 mm 。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(8 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 設 R（以千元為單位）為某網上商店的總營業額。 已知

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\frac{2e^{0.5t}-5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5}+2\ ,$$

其中 t（$t\geq 0$）為自該商店開張起計所經過的月數。

(a) 該商店的總營業額的最大變率是否超過每月 4 千元？ 解釋你的答案。 (4 分)

(b) 設 P（以千元為單位）為該商店的總盈利。 已知

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-10(0.8)^{2t+3}\ ,$$

其中 t（$t\geq 0$）為自該商店開張起計所經過的月數。

(i) 求自該商店開張起計首 12 個月內該商店的總盈利。

(ii) 估計經過一段很長時間後該商店的總盈利的變率。

(9 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

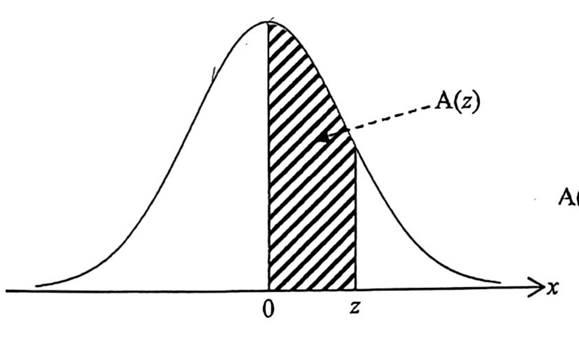
– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註： 本表所列數字為標準正態曲線下由 $x=0$ 至 $x=z$ ($z \geq 0$) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z)=\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

2024-DSE
數學 延伸部分
單元二

請在此貼上電腦條碼

香港考試及評核局
2024年香港中學文憑考試

考生編號

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

(一) 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11 及 13 頁之適當位置貼上電腦條碼。

(二) 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。

(三) 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(四) 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。

(五) 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

(六) 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。

(七) 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

(八) 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

A032C001

參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

****

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

甲部（50 分）

1. 設 O、A 及 B 為直角坐標平面上的三相異點使得 $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{AB}|$ ，其中 O 為原點。

   (a) 描述 O、A 與 B 之間的幾何關係。

   (b) 假定 $\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ 及 $|\overrightarrow{OB}| = 20$ 。求 $\overrightarrow{AB}$ 。

(3 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

2. 設 $x>0$ 。

(a) 求 $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ 。

(b) 從基本原理求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\sqrt{x}}$ 。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 設 m 為一正整數。考慮 $\left(x^m-\frac{2}{x}\right)^{24}$ 依 x 的降冪次序的展開式。

(a) 求該展開式的首 3 項。

(b) 若該展開式的第 19 項為一常數，求 m 及該展開式中 x^{60} 的係數。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. (a) 設 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 。 證明 $\csc 2x - \cot 2x = \tan x$ 。

(b) 解方程 $(\csc 3\theta - \cot 3\theta)(\csc\theta - \cot\theta) = 1$ ， 其中 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ 。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 設 k 為一常數。

利用分部積分法，證明 $\int \cos(k \ln x) dx = \frac{x}{1+k^2}\left(\cos(k \ln x) + k \sin(k \ln x)\right)$ + 常數。

(b) 利用 (a)，或其他方法，計算 $\int_1^e \sin^2(\pi \ln x) dx$ 。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

6. 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases}3x + y - 9z = 0\\ 2x + y - 7z = 0\end{cases}。$$

(a) 解 (E)。

(b) 某人宣稱 (E) 有唯一解 (x, y, z) 滿足 $\sin x + \cos y - \cos z = 0$，其中 $0 < z < \frac{\pi}{2}$。你是否同意？解釋你的答案。

(6分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 設 C 為曲線 $x^2y+2xy^2+8=0$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ ，答案以 x 及 y 表示。

(b) 某人宣稱有兩條 C 的切線平行於直線 $x+2y+1=0$ 。 你是否同意？ 解釋你的答案。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ， $\sum_{r=1}^{n} r(2^{-r}) = 2-(n+2)(2^{-n})$ 。

(b) 計算

(i) $\sum_{r=1\,000}^{1\,999} r(2^{-r})$ ，

(ii) $\sum_{r=1}^{1\,000} (2\,000-r)2^{r}$ 。

(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

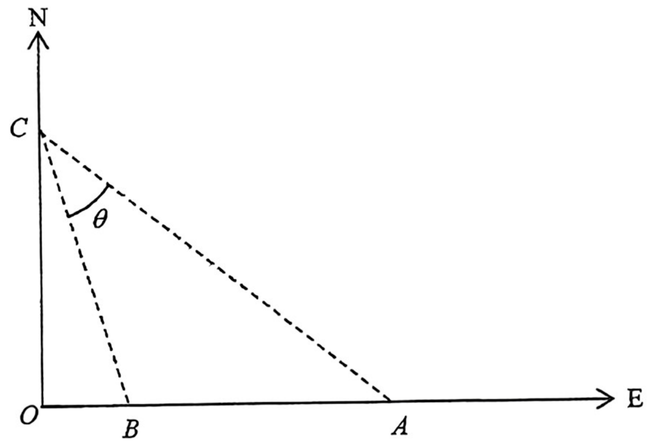
請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 兩玩具車 A 及 B 分別以恆速率每秒 4 米及每秒 1 米沿直線向東前進。 它們同時從 O 點出發。 定點 C 位於 O 以北 10 米。 下圖顯示於 t 秒後 A 及 B 的位置。 設 $\angle ACB=\theta$ 弧度。



(a) 證明 $\tan\theta=\dfrac{15t}{2(t^2+25)}$ 。

(b) 已知當 $t=T$ 時，$\angle BAC=\angle ACB$ 。 求

(i) T，

(ii) 當 $t=T$ 時 θ 的變率。

(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部（50 分）

10. 對所有 $x \in \mathbf{R}$，定義 $f(x)=\dfrac{2(x+2)^2}{2x^2+6x+5}$ 。將 $y=f(x)$ 的圖像記為 G 。

(a) 求 G 的漸近線。 (2 分)

(b) 求 $f'(x)$ 。 (2 分)

(c) 求 G 的極大點及極小點。 (3 分)

(d) 描繪 G 。 (3 分)

(e) 求 G、 x 軸與 y 軸圍成的區域的面積。 (3 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 設 a 為一非零的常數。 利用代換積分法，以 a 表 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ 。 (3 分)

(b) 設 $\mathrm{g}(x)$ 及 $\mathrm{h}(x)$ 均為定義在 $\mathbf{R}$ 上的連續函數。 已知 $\mathrm{g}(x)$ 為一偶函數及 $\mathrm{h}(x)$ 為一奇函數。 證明 $\displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)}{1+e^{\mathrm{h}(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{c} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ ， 其中 c 為一常數。 (4 分)

(c) 計算 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3^x+3^{-x}}{(1+e^{\sin^3 x})(9^x+9^{-x}+7)}\,\mathrm{d}x$ 。 (5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. (a) 考慮實變數 x , y , z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases} 2x & & + z = -2 \\ -(2\lambda+5)x + \lambda y & & = -1 \\ (\lambda+2)x + y - z = 0 \end{cases}$$ ，其中 $\lambda \in \mathbf{R}$ 。

假設 (E) 有唯一解。

(i) 求 λ 值的範圍。

(ii) 解 (E) 。

(6 分)

(b) 對任意 $h>0$ ，設 $\mathbf{u}=h\mathbf{i}+(2h+5)\mathbf{j}-2h\mathbf{k}$ 。 假定向量 $\mathbf{v}$ 垂直於 $(h+2)\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mu\mathbf{i}+2h\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ，其中 μ 為一實數。

(i) 以 h 表 $\mathbf{v}$ 及 μ 。

(ii) 是否存在一 h 的值使得以 $\mathbf{u}$ 及 $\mathbf{v}$ 為鄰邊的平行四邊形的面積為 9 ？ 解釋你的答案。

(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. 設 $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ 。

(a) 計算 $A-6A^{-1}$ 及 ABA^{-1} 。 (4 分)

(b) 求 B^n ，其中 n 為一正整數。 (3 分)

(c) 是否存在一正整數 k 使得 $A^{2k}B^{2k}(A^{-1})^{2k}=(ABA^{-1})^{2k}$ ？解釋你的答案。 (3 分)

(d) 計算 $A^{999}B^{999}(A^{-1})^{999}$ 。 (2 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

– 試卷完 –

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

評卷參考

單元一（微積分與統計）

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生以及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

一般閱卷原則

1. 評卷時，閱卷員須跟循評卷參考的評分標準給分，這是十分重要的。很多時考生會運用評卷參考以外的方法而得到正確答案，一般來說，只要運用合理的方法而取得正確答案，該考生應可獲得該部分的**所有分數**（除題目特別指明特定方法外）。閱卷員應有耐性地評閱評卷參考以外的解題方法。

2. 在評卷參考中，分數會分為下列三類：

「M」分	使用正確方法的得分；
「A」分	正確答案的得分；
沒有「M」或「A」的分	正確地完成證題或推演得題目所給的答案的得分。

某些題目由數部分組成，而較後部分的答案卻需依賴較前部分所得的結果。在這情況下，若考生因為前部分錯誤的結果而導致後部分的答案錯誤，但卻能運用正確的方法去解題，則方法正確的步驟可給「M」分，而相應的答案將沒有「A」分（除特別指明外）。

3. 為方便閱卷員評卷，評卷參考已盡量詳盡。當然，考生的答案多不會如評卷參考般清楚列寫出來，諸如欠缺某幾個步驟或將步驟隱含於字裏行間。如遇到類似情況，閱卷員應運用他們的專業知識去判斷是否給分。一般來說，如考生的答案顯示他已運用相關的概念或技巧，則該部分應予給分。

4. 評卷時遇有不清楚的地方，應以考生的利益為依歸。

5. 評卷參考中，塗上陰影的部分代表可省略的步驟，有外框的部分代表運用不同方法的答案。所有分數答案必須化簡。

6. 除在題目中特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。未達所需準確度的答案均不被接受。

解	分	備註
1. (a) $0.3+a+0.1+0.2+0.2=1$		
$a=0.2$	1A	
$\mathrm{Var}(5X)=739$		
$25\mathrm{Var}(X)=739$	1M	
$\mathrm{Var}(X)=29.56$		
$\mathrm{E}(X)=(0.3)(0)+(0.2)(3)+(0.1)(6)+0.2b+(0.2)(15)=0.2b+4.2$		
$\mathrm{E}(X^2)=(0.3)(0^2)+(0.2)(3^2)+(0.1)(6^2)+0.2b^2+(0.2)(15^2)=0.2b^2+50.4$		
$\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\mathrm{Var}(X)$		
$0.2b^2+50.4-(0.2b+4.2)^2=29.56$	1M	
$2b^2-21b+40=0$		
$b=8$ 或 $b=\frac{5}{2}$ （捨去）	1A	
(b) (i) $\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=6)=0.3$	1M	任何一項
$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=8)+\mathrm{P}(X=15)=0.5$		
$\mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(X=6)=0.1$		
$\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D)$ $=0.15$ $\neq 0.1$ $=\mathrm{P}(C\cap D)$		
因此， C 與 D 不是獨立。	1A	必須顯示理由
(ii) 所求概率 $=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=8)+\mathrm{P}(X=15)$		
$=0.7$	1A	
	----------(7)	

解	分	備註
2. 設 F 為選出的成員為女性的事件， 且 W 為選出的成員佩戴眼鏡的事件。 將 F 及 W 的互補事件分別記為 F' 及 W' 。		
(a) 所求概率 $=P(F\|W')$ $=\dfrac{P(F\cap W')}{P(W')}$		
$=\dfrac{\frac{3}{20}}{1-\frac{3}{5}}$	1M	
$=\dfrac{3}{8}$	1A	0.375
(b) $P(F')P(W'\|F')=P(F'\|W')P(W')$		
$P(F')\left(1-\dfrac{4}{9}\right)=\left(1-\dfrac{3}{8}\right)\left(1-\dfrac{3}{5}\right)$	1M	
$P(F')=\dfrac{9}{20}$	1M	
所求概率 $=P(F)-P(F\cap W')$		
$=\left(1-\dfrac{9}{20}\right)-\dfrac{3}{20}$	1M	
$=\dfrac{2}{5}$	1A	0.4
	----------(6)	
(a) $\dfrac{C_1^{20}p(1-p)^{19}}{C_3^{20}p^3(1-p)^{17}}=\dfrac{49}{57}$	1M + 1M	
$\dfrac{20(1-p)^2}{1140p^2}=\dfrac{49}{57}$ $48p^2+2p-1=0$		
$p=\dfrac{1}{8}$ 或 $p=\dfrac{-1}{6}$ （捨去）	1A	0.125
(b) $1-\left(1-\dfrac{1}{8}\right)^k>0.85$	1M	
$0.875^k<0.15$ $k\ln 0.875<\ln 0.15$	1M	
$k>14.20729573$		
因此， k 的最小值為 15 。	1A	
	----------(6)	

解	分	備註
4. (a) $2(Z_{\frac{\beta}{2}\%})\frac{1.75}{\sqrt{81}}=0.7$	1M+1A	
$Z_{\frac{\beta}{2}\%}=1.8$		
$\therefore \frac{\beta}{2}\%=0.4641$		
$\beta=92.82$	1A	
(b) 樣本中女生每星期的溫習時間之平均值		
$=\frac{(81)(13)-(36)(12.5)}{81-36}$	1M	
$=13.4$ 小時		
設 b_i 小時為該樣本中第 i 名男生每星期的溫習時間。		
$2^2=\frac{1}{36-1}\left(\sum_{i=1}^{36}b_i^{\,2}-(36)(12.5)^2\right)$	1M	任何一項
$\sum_{i=1}^{36}b_i^{\,2}=5\,765$		
設 c_j 小時為該樣本中第 j 名學生每星期的溫習時間。		
$1.75^2=\frac{1}{81-1}\left(\sum_{j=1}^{81}c_j^{\,2}-(81)(13)^2\right)$		
$\sum_{j=1}^{81}c_j^{\,2}=13\,934$		
設 s 小時為所求的樣本標準差。		
$s^2=\frac{1}{45-1}\left((13\,934-5\,765)-(45)(13.4^2)\right)$		
$s^2=\frac{111}{55}$		
$s=\frac{\sqrt{6\,105}}{55}$		
因此，所求的樣本標準差為 $\frac{\sqrt{6105}}{55}$ 小時。	1A	接受答案準確至 1.4206 小
	----------(6)	

解	分	備註
5. (a) $\dfrac{2}{e^{nx}}$		
$=2e^{-nx}$		
$=2\left(1+(-nx)+\dfrac{(-nx)^2}{2!}+\dfrac{(-nx)^3}{3!}+\cdots\right)$	1M	
$=2-2nx+n^2x^2-\dfrac{n^3}{3}x^3+\cdots$	1A	
(b) $(1+4x)^m$		
$=C_0^m(4x)^0+C_1^m(4x)^1+C_2^m(4x)^2+C_3^m(4x)^3+\cdots+(4x)^m$	1M	
$=1+4mx+8m(m-1)x^2+\dfrac{32}{3}m(m-1)(m-2)x^3+\cdots+(4x)^m$		
$(1+4x)^m+\dfrac{2}{e^{nx}}$		
$=3+(4m-2n)x+\left(8m(m-1)+n^2\right)x^2+\dfrac{1}{3}\left(32m(m-1)(m-2)-n^3\right)x^3+\cdots$		
由此，可得		
$4m-2n=24$	1M	任何一項
$8m(m-1)+n^2=980$		
故此，可得		
$8m(m-1)+(2m-12)^2=980$	1M	
$3m^2-14m-209=0$		
$m=11$ 或 $m=\dfrac{-19}{3}$ （捨去）		
當 $m=11$ 時，		
$4(11)-2n=24$		
$n=10$		
x^3 的係數		
$=\dfrac{1}{3}\left(32(11)(11-1)(11-2)-10^3\right)$	1M	
$=\dfrac{30\,680}{3}$	1A	接受答案準確至 10 226.6
	----------(7)	

:06 小

解	分	備註
6. (a) (i) $u=(2x+1)\ln(x^2+x+e)$	1A	
(ii) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$		
$=\frac{(2x+1)^2}{x^2+x+e}+2\ln(x^2+x+e)$	1M	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u$		
$=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}e^u\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$		
$=e^u\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$	1M	
$=(x^2+x+e)^{2x+1}\left(\frac{(2x+1)^2}{x^2+x+e}+2\ln(x^2+x+e)\right)$	1A	
(b) 於 $x=0$ 處切線的斜率		
$=(0^2+0+e)^{2(0)+1}\left(\frac{(2(0)+1)^2}{0^2+0+e}+2\ln(0^2+0+e)\right)$	1M	
$=2e+1$		
當 $x=0$ 時， $y=e$ 。		
所求切線的方程為		
$y-e=(2e+1)(x-0)$	1M	
$y=(2e+1)x+e$	1A	
	----(7)	

解	分	備註
7. 對角線的長度 $=\sqrt{20^2+15^2}=25\text{ cm}$		
圖片的長 $=\sqrt{25^2-x^2}\text{ cm}$		
設 $A\text{cm}^2$ 為圖片的面積。 $A=x\sqrt{25^2-x^2}$	1M	
$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$ $=x\left(\frac{1}{2}\right)(625-x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x)+(625-x^2)^{\frac{1}{2}}$	1M	
$=-x^2(625-x^2)^{\frac{-1}{2}}+(625-x^2)^{\frac{1}{2}}$		
$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$		
當 $x=7$ 時， $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ $=(-(7^2)(625-7^2)^{\frac{-1}{2}}+(625-7^2)^{\frac{1}{2}})(-0.5)$	1M	
$=\frac{-527}{48}$		
所求的變率為 $\frac{-527}{48}\text{cm}^2\text{ s}^{-1}$ 。	1A	接受答案準確至 $-10.9792\text{cm}^2\text{ s}^{-1}$
	----------(4)	

解	分	備註
8. (a) $\int_0^{0.5} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$		
$=\sqrt{2\pi}\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$		
$=0.1915\sqrt{2\pi}$	1M+1A	接受答案準確至 0.4800
(b) 考慮 $\int_0^{0.5} xe^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$ 。		
設 $u=\frac{-x^2}{2}$ 。	1M	
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-x$		
$\int_0^{0.5} xe^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$		
$=-\int_0^{\frac{-1}{8}} e^u \mathrm{d}u$	1M	
$=-[e^u]_0^{\frac{-1}{8}}$		
$=1-e^{\frac{-1}{8}}$		
當 $x=0.5$ 時， $y=0$ 。		
所求面積		
$=-\int_0^{0.5} (2x-1)e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$	1M	
$=-2\int_0^{0.5} xe^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x+\int_0^{0.5} e^{\frac{-x^2}{2}} \mathrm{d}x$		
$=2(e^{\frac{-1}{8}}-1)+0.1915\sqrt{2\pi}$	1M+1A	1M 給利用 (a) 的結果 接受答案準確至 0.2450
	----------(7)	

解	分	備註
9. (a) $P\left(Z>\frac{5.7-\mu}{\sigma}\right)=0.3085$		
$P\left(0<Z<\frac{5.7-\mu}{\sigma}\right)=0.5-0.3085$		
$\frac{5.7-\mu}{\sigma}=0.5$	1M	
$\mu+0.5\sigma=5.7$		
$P\left(\frac{(\mu-1.5)-\mu}{\sigma}<Z<\frac{(\mu+1.5)-\mu}{\sigma}\right)=0.7888$		
$P\left(\frac{-1.5}{\sigma}<Z<\frac{1.5}{\sigma}\right)=0.7888$		
$P\left(0<Z<\frac{1.5}{\sigma}\right)=0.3944$		
$\frac{1.5}{\sigma}=1.25$	1M	
求解後，可得 $\mu=5.1$ 及 $\sigma=1.2$ 。	1A ----------(3)	給兩項正確
(b) 所求概率 $=P(\overline{X}\le 5.4)$		
$=P(Z\le\frac{5.4-5.1}{\frac{1.2}{\sqrt{16}}})$	1M	
$=P(Z\le 1)$ $=0.8413$	1A ----------(2)	
(c) (i) 留意 P(A 等級) $=0.3085$ 。		
P(C 等級) $=P\left(Z\le\frac{3.6-5.1}{1.2}\right)=0.1056$	1M	
P(B 等級) $=1-0.1056-0.3085=0.5859$		
價錢的期望值 $=8((0.1056)(50)+(0.5859)(80)+(0.3085)(100))$	1M	
$=\$664.016$	1A	
(ii) 所求概率 $=C_5^8(0.5859)^5\left(C_2^3(0.1056)^2(0.3085)+C_1^3(0.1056)(0.3085)^2+(0.3085)^3\right)+$ $C_6^8(0.5859)^6\left(C_1^2(0.1056)(0.3085)+(0.3085)^2\right)+C_7^8(0.5859)^7(0.3085)$	1M+1M	
≈ 0.510086888 ≈ 0.5101	1A ----------(6)	接受答案準確至 0.5101

解	分	備註
10. (a) 所求概率		
$=\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}+\frac{e^{-1.6}1.6^1}{1!}+\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}$	1M	
$=3.88e^{-1.6}$	1A ----------(2)	接受答案準確至 0.7834
(b) 所求概率		
$=(3.88e^{-1.6})^7$	1M	
≈ 0.181018883		
≈ 0.1810	1A ----------(2)	接受答案準確至 0.1810
(c) 所求概率		
$=\frac{C_2^7\left(\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)^2\left(\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}\right)^5+C_1^7\left(\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)C_2^6\left(\frac{e^{-1.6}1.6^1}{1!}\right)^2\left(\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}\right)^4+C_4^7\left(\frac{e^{-1.6}1.6^1}{1!}\right)^4\left(\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}\right)^3}{(3.88e^{-1.6})^7}$	1M+1M+1M	
≈ 0.096294544		
≈ 0.0963	1A ----------(4)	接受答案準確至 0.0963
(d) 所求概率		
$=\frac{(3.88e^{-1.6})^7-\left(\frac{e^{-1.6}1.6^1}{1!}+\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}\right)^7-C_1^7\left(\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)\left(\frac{e^{-1.6}1.6^1}{1!}+\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}\right)^6}{1-\left(1-\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)^7-C_1^7\left(\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)\left(1-\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)^6}$	1M+1M+1M	
≈ 0.242536317		
≈ 0.2425	1A ----------(4)	接受答案準確至 0.2425

解	分	備註
11. (a) $\ln\left(\dfrac{P}{-t^2+10t+8}\right)=\ln a+bt$	1A ----------(1)	
(b) $-0.1=\ln a+3b$ $0=\ln a+2.5b$	1M	------------------ 給兩項 ------------------
求解後，可得 $a=e^{0.5}$ 及 $b=-0.2$ 。	1A+1A ----------(3)	
(c) 設 $\mathrm{P}(t)=e^{0.5}(-t^2+10t+8)e^{-0.2t}=(-t^2+10t+8)e^{0.5-0.2t}$ 。		
所求累積雨量 $=\int_0^4(-t^2+10t+8)e^{0.5-0.2t}\,\mathrm{d}t$		
$\approx\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4-0}{4}\right)\left(\mathrm{P}(0)+\mathrm{P}(4)+2\left(\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\mathrm{P}(3)\right)\right)$	1M	
≈ 94.1599635 ≈ 94.1600 mm	1A ----------(2)	接受答案準確至 94.1600 mm
(d) (i) 設 $v=4te^{0.4t}+3$ 。 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0.8e^{0.4t}(2t+5)$	1M	
$\int Q\,\mathrm{d}t$ $=\int\dfrac{16(2t+5)e^{0.4t}}{4te^{0.4t}+3}\mathrm{d}t$ $=20\int\dfrac{0.8e^{0.4t}(2t+5)}{4te^{0.4t}+3}\mathrm{d}t$		
$=20\int\dfrac{1}{v}\mathrm{d}v$	1M	
$=20\ln\lvert v\rvert+$ 常數	1M	
$=20\ln(4te^{0.4t}+3)+$ 常數	1A	

解	分	備註
(d) (ii) $P=(-t^2+10t+8)e^{0.5-0.2t}$		
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ $=(-2t+10)e^{0.5-0.2t}+(-t^2+10t+8)e^{0.5-0.2t}(-0.2)$	1M	
$=(0.2t^2-4t+8.4)e^{0.5-0.2t}$		
$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2}$ $=(0.4t-4)e^{0.5-0.2t}+(0.2t^2-4t+8.4)e^{0.5-0.2t}(-0.2)$ $=-0.04e^{0.5-0.2t}(t^2-30t+142)$ $=-0.04e^{0.5-0.2t}\left(t-(15-\sqrt{83})\right)\left(t-(15+\sqrt{83})\right)$		
留意 $15-\sqrt{83}>5$ 且 $15+\sqrt{83}>24$ 。 所以，對 $0\le t\le 4$ ， $e^{0.5-0.2t}\left(t-(15-\sqrt{83})\right)\left(t-(15+\sqrt{83})\right)>0$ 。 由此，對 $0\le t\le 4$ ， $\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2}<0$ 。		
故此，(c) 的估計值為過低。	1A	必須顯示理由
累積雨量之和		
$>94.1599635+\left[20\ln(4te^{0.4t}+3)\right]_0^4$	1M	
$=94.1599635+20\ln\left(\frac{16e^{1.6}+3}{3}\right)$ ≈ 160.3826253 mm >160		
因此，同意該宣稱。	1A ----------(8)	必須顯示理由

解	分	備註
12. (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)$		
$=\dfrac{(2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5)(e^{0.5t}+2.5e^{-0.5t})-(2e^{0.5t}-5e^{-0.5t})(e^{0.5t}-2.5e^{-0.5t})}{(2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5)^2}$	1M	
$=\dfrac{20-5e^{0.5t}-12.5e^{-0.5t}}{(2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5)^2}$		
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)=0$		
$20-5e^{0.5t}-12.5e^{-0.5t}=0$		
$2e^{t}-8e^{0.5t}+5=0$		
$e^{0.5t}=\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}$ 或 $e^{0.5t}=\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}$ （捨去）		
$t=2\ln\left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$	1M	
(see table below)	1M	

t	$0<t<2\ln\left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$	$t=2\ln\left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$	$t>2\ln\left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)$	+	0	−

故此，當 $t=2\ln\left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$ 時，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ 達至其最大值。

總營業額的最大變率

$=\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2\ln\left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)}\approx 3.6330<4$

解	分	備註
因此，該商店的總營業額的最大變率不超過每月 4 千元。	1A ----------(4)	必須顯示理由

解	分	備註
(b) (i) 所求的總盈利		
$=\int_0^{12}\left(\frac{dR}{dt}-10(0.8)^{2t+3}\right)dt$	1M	
$=\int_0^{12}\frac{dR}{dt}dt-\int_0^{12}10(0.8)^{2t+3}dt$		
設 $u=2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5$ 。	1M	
$\frac{du}{dt}=e^{0.5t}-2.5e^{-0.5t}$		
$\int_0^{12}\frac{dR}{dt}dt$		
$=\int_0^{12}\left(\frac{2e^{0.5t}-5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5}+2\right)dt$		
$=\int_0^{12}\frac{2e^{0.5t}-5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5}dt+\int_0^{12}2dt$		
$=\int_2^{2e^6+5e^{-6}-5}\frac{2}{u}du+\int_0^{12}2dt$	1M	
$=\left[2\ln\lvert u\rvert\right]_2^{2e^6+5e^{-6}-5}+\left[2t\right]_0^{12}$	1M	
$=2\ln\left(\frac{2e^6+5e^{-6}-5}{2}\right)+24$		
$\int_0^{12}10(0.8)^{2t+3}dt$		
$=10\int_0^{12}0.8^{2t+3}dt$		
$=10\left[\frac{0.8^{2t+3}}{2\ln 0.8}\right]_0^{12}$	1M	
$=\frac{5}{\ln 0.8}(0.8^{27}-0.8^3)$		
所求的總盈利		
$=2\ln\left(\frac{2e^6+5e^{-6}-5}{2}\right)+24-\frac{5}{\ln 0.8}(0.8^{27}-0.8^3)$		
≈ 24.56934013		
≈ 24.5693 千元	1A	接受答案準確至 24.5693 千

解	分	備註
(b) (ii) $\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$	1M	
$=\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-\lim_{t\to\infty}10(0.8)^{2t+3}$		
$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2e^{0.5t}-5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5}+2\right)-\lim_{t\to\infty}10(0.8)^{2t+3}$		
$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\frac{2e^{0.5t}}{e^{0.5t}}-\frac{5e^{-0.5t}}{e^{0.5t}}}{\frac{2e^{0.5t}}{e^{0.5t}}+\frac{5e^{-0.5t}}{e^{0.5t}}-\frac{5}{e^{0.5t}}}\right)+2-\lim_{t\to\infty}10(0.8)^{2t+3}$		
$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2-5e^{-t}}{2+5e^{-t}-5e^{-0.5t}}\right)+2-\lim_{t\to\infty}10(0.8)^{2t+3}$	1M	
$=\frac{2-5(0)}{2+5(0)-5(0)}+2-0$		
$=3$		
該變率的估計值為每月 3 千元。	1A ----------(9)	

693

評卷參考

單元二（代數與微積分）

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生以及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

一般閱卷原則

1. 評卷時，閱卷員須跟循評卷參考的評分標準給分，這是十分重要的。很多時考生會運用評卷參考以外的方法而得到正確答案，一般來說，只要運用合理的方法而取得正確答案，該考生應可獲得該部分的所有分數（除題目特別指明特定方法外）。閱卷員應有耐性地評閱評卷參考以外的解題方法。

2. 在評卷參考中，分數會分為下列三類：

「M」分	使用正確方法的得分；
「A」分	正確答案的得分；
沒有「M」或「A」的分	正確地完成證題或推演得題目所給的答案的得分。

某些題目由數部分組成，而較後部分的答案卻需依賴較前部分所得的結果。在這情況下，若考生因為前部分錯誤的結果而導致後部分的答案錯誤，但卻能運用正確的方法去解題，則方法正確的步驟可給「M」分，而相應的答案將沒有「A」分（除特別指明外）。

3. 為方便閱卷員評卷，評卷參考已盡量詳盡。當然，考生的答案多不會如評卷參考般清楚列寫出來，諸如欠缺某幾個步驟或將步驟隱含於字裏行間。如遇到類似情況，閱卷員應運用他們的專業知識去判斷是否給分。一般來說，如考生的答案顯示他已運用相關的概念或技巧，則該部分應予給分。

4. 評卷時遇有不清楚的地方，應以考生的利益為依歸。

5. 評卷參考中，塗上陰影的部分代表可省略的步驟，有外框的部分代表運用不同方法的答案。所有分數答案必須化簡。

6. 除在題目中特別指明外，不以真確值表示的數值答案均不被接受。

解	分	備註
1. (a) O, A 與 B 共線。	1M	
(b) $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$		
$\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$		
$20 = 5 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$		
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 15$		
$\overrightarrow{AB}$		
$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left(\frac{1}{5}(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})\right)$	1M	
$= 9\mathbf{i}+12\mathbf{j}$	1A	
	----------(3)	
(a) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$		
$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$	1M	
$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$		
$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$		
$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$	1A	
(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\sqrt{x}}$		
$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}}}{h}$	1M	
$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}-1)}{h}$		
$= e^{\sqrt{x}}\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{e^{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}$	1M	
$= e^{\sqrt{x}}\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)$		
$= e^{\sqrt{x}}(1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ （藉 (a)）		
$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$	1A	必須顯示理由
	----------(5)	

解	分	備註

3. (a) $\left(x^m - \frac{2}{x}\right)^{24}$

$= (x^m)^{24} + C_1^{24}(x^m)^{23}\left(\frac{-2}{x}\right)^1 + C_2^{24}(x^m)^{22}\left(\frac{-2}{x}\right)^2 + \cdots +$ — 1M

$= x^{24m} - 48x^{23m-1} + 1104x^{22m-2} + \cdots + 2^{24}x^{-24}$

因此，首 3 項為 x^{24m} 、 $-48x^{23m-1}$ 及 $1104x^{22m-2}$ 。 — 1A

(b) 該展開式的第 19 項

$= C_{18}^{24}(x^m)^{24-18}\left(\frac{-2}{x}\right)^{18}$ — 1M

$= 2^{18}C_{18}^{24}x^{6m-18}$

$6m - 18 = 0$

$m = 3$ — 1A

該展開式的第 $(r+1)$ 項

$= C_r^{24}(x^3)^{24-r}\left(\frac{-2}{x}\right)^r$

$= (-2)^r C_r^{24}x^{72-4r}$

$72 - 4r = 60$

$r = 3$

所求係數

$= (-2)^3 C_3^{24}$

$= -16\,192$ — 1A

-----(5)

解	分	備註
4. (a) $\csc 2x - \cot 2x$		
$= \dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}$		
$= \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$		
$= \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x}$	1M	
$= \dfrac{\sin x}{\cos x}$		
$= \tan x$	1	
(b) $(\csc 3\theta - \cot 3\theta)(\csc\theta - \cot\theta) = 1$		
$\tan\dfrac{3\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2} = 1$	1M	給利用 (a)
$\dfrac{\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} = 1$		
$\dfrac{\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta)}{\frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 2\theta)} = 1$	1M	
$\cos\theta - \cos 2\theta = \cos\theta + \cos 2\theta$		
$\cos 2\theta = 0$		
$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$		
$\theta = \dfrac{\pi}{4}$	1A	必須顯示理由
	----------(5)	

解		備註
5. (a) $\int \cos(k\ln x)\mathrm{d}x$		
$= x\cos(k\ln x) - \int x(-\sin(k\ln x))\left(\frac{k}{x}\right)\mathrm{d}x$	1M	
$= x\cos(k\ln x) + k\int \sin(k\ln x)\mathrm{d}x$		
$= x\cos(k\ln x) + kx\sin(k\ln x) - k\int x\cos(k\ln x)\left(\frac{k}{x}\right)\mathrm{d}x$	1M	
$= x\cos(k\ln x) + kx\sin(k\ln x) - k^2\int \cos(k\ln x)\mathrm{d}x$		
$(1+k^2)\int \cos(k\ln x)\mathrm{d}x = x\cos(k\ln x) + kx\sin(k\ln x)$ + 常數		
$\int \cos(k\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{1+k^2}(\cos(k\ln x) + k\sin(k\ln x))$ + 常數	1	
(b) $\int_1^e \sin^2(\pi\ln x)\mathrm{d}x$		
$= \frac{1}{2}\int_1^e (1-\cos(2\pi\ln x))\mathrm{d}x$	1M	
$= \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e \cos(2\pi\ln x)\mathrm{d}x$		
$= \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+4\pi^2}(\cos(2\pi\ln x) + 2\pi\sin(2\pi\ln x))\right]_1^e$	1M	給利用 (a)
$= \frac{2(e-1)\pi^2}{1+4\pi^2}$	1A	
	-----------(6)	
6. (a) (E) 的增廣矩陣為		
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 1 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$	1M	
因此，解集為 $\{(2t, 3t, t) : t \in \mathbf{R}\}$ 。	1A	
(b) 代入 $x=2t$ 、 $y=3t$ 及 $z=t$ ，可得		
$\sin 2t + \cos 3t - \cos t = 0$	1M	給利用 (a) 的結果
$\sin 2t - 2\sin 2t \sin t = 0$	1M	
$(\sin 2t)(1-2\sin t) = 0$		
$\sin 2t = 0$ 或 $\sin t = \frac{1}{2}$	1M	
由於 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ，可得 $\sin 2t > 0$ 。		
$\therefore t = \frac{\pi}{6}$		
因此，同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
	-----------(6)	

解	分	備註
7. (a) $x^2y+2xy^2+8=0$		
$2xy+x^2\dfrac{dy}{dx}+2y^2+(2x)(2y)\dfrac{dy}{dx}=0$	1M	
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2y(x+y)}{x(x+4y)}$	1A	
(b) 該直線的斜率為 $\dfrac{-1}{2}$ 。		
設 (h,k) 為所求切線的切點的坐標。		
$\dfrac{-2k(h+k)}{h(h+4k)}=\dfrac{-1}{2}$	1M	
$k^2=\dfrac{h^2}{4}$		
$k=\dfrac{h}{2}$ 或 $k=\dfrac{-h}{2}$	1M	
當 $k=\dfrac{h}{2}$ 時， $h^2\left(\dfrac{h}{2}\right)+2h\left(\dfrac{h}{2}\right)^2+8=0$ $h^3=-8$ $h=-2$	1M	任何一項
故此， C 在點 $(-2,-1)$ 的切線平行於直線 $x+2y+1=0$ 。		
當 $k=\dfrac{-h}{2}$ 時， $h^2\left(\dfrac{-h}{2}\right)+2h\left(\dfrac{-h}{2}\right)^2+8$ $=8$ $\neq 0$		
所以，只有一條 C 的切線平行於直線 $x+2y+1=0$ 。		
因此，不同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
	(6)	

解	分	備註
8. (a) 留意 $(1)(2^{-1})=2-(1+2)(2^{-1})=\frac{1}{2}$ 。 所以，對 $n=1$ ，命題為真。	1	
假設 $\sum_{r=1}^{m} r(2^{-r})=2-(m+2)(2^{-m})$ ， 其中 m 為一正整數。	1M	
$\sum_{r=1}^{m+1} r(2^{-r})$ $=\sum_{r=1}^{m} r(2^{-r})+(m+1)(2^{-(m+1)})$ $=2-(m+2)(2^{-m})+(m+1)(2^{-(m+1)})$ （藉歸納法假設） $=2-(2^{-(m+1)})\big(2(m+2)-(m+1)\big)$ $=2-\big((m+1)+2\big)(2^{-(m+1)})$	1M	給利用歸納法假設
故此，若對 $n=m$ ，命題為真，則對 $n=m+1$ ，命題為真。 藉數學歸納法，對所有正整數 n ，命題為真。	1	
(b) (i) $\sum_{r=1\,000}^{1\,999} r(2^{-r})$ $=\sum_{r=1}^{1\,999} r(2^{-r})-\sum_{r=1}^{999} r(2^{-r})$ $=\big(2-(2\,001)(2^{-1\,999})\big)-\big(2-(1\,001)(2^{-999})\big)$ $=1\,001(2^{-999})-2\,001(2^{-1\,999})$	1A	
(ii) $\sum_{r=1}^{1\,000} (2\,000-r)2^{r}$ $=1\,999(2^{1})+1\,998(2^{2})+1\,997(2^{3})+\cdots+1\,000(2^{1\,000})$ $=1\,000(2^{1\,000})+1\,001(2^{999})+1\,002(2^{998})+\cdots+1\,999(2^{1})$ $=(2^{2\,000})\big(1\,000(2^{-1\,000})+1\,001(2^{-1\,001})+1\,002(2^{-1\,002})+\cdots+1\,999(2^{-1\,999})\big)$	1M	
$=(2^{2\,000})\left(\sum_{r=1\,000}^{1\,999} r(2^{-r})\right)$ $=(2^{2\,000})\big(1\,001(2^{-999})-2\,001(2^{-1\,999})\big)$ $=1\,001(2^{1\,001})-4\,002$	1A --------(7)	

解	分	備註
9. (a) $\tan\theta$		
$=\tan(\angle ACO-\angle BCO)$		
$=\dfrac{\tan\angle ACO-\tan\angle BCO}{1+(\tan\angle ACO)(\tan\angle BCO)}$		
$=\dfrac{\frac{4t}{10}-\frac{t}{10}}{1+\left(\frac{4t}{10}\right)\left(\frac{t}{10}\right)}$	1M	
$=\dfrac{15t}{2(t^2+25)}$	1	
(b) (i) 當 $t=T$ 時，		
$\tan\angle BAC=\tan\angle ACB$		
$\dfrac{10}{4T}=\dfrac{15T}{2(T^2+25)}$	1M	
$T^2+25=3T^2$		
$T^2=\dfrac{25}{2}$		
$T=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$	1A	
(ii) $\tan\theta=\dfrac{15t}{2(t^2+25)}$		
$\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{15}{2}\left(\dfrac{t^2+25-(t)(2t)}{(t^2+25)^2}\right)$	1M + 1M	
$(1+\tan^2\theta)\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{15(25-t^2)}{2(t^2+25)^2}$		
$\left(1+\left(\dfrac{15t}{2(t^2+25)}\right)^2\right)\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{15(25-t^2)}{2(t^2+25)^2}$		
$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{30(25-t^2)}{4(t^2+25)^2+225t^2}$		
$\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right\vert_{t=\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{30\left(25-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{4\left(\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+25\right)^2+225\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{2}{45}$		
所求的 θ 的變率為每秒 $\dfrac{2}{45}$ 弧度。	1A	
	----------(7)	

解	分	備註

10. (a) 留意 G 沒有垂直漸近線。

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2(x+2)^2}{2x^2+6x+5}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}{2+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}$$ 1M

$$=1$$

因此， G 的水平漸近線為 $y=1$。 1A

----------(2)

(b) $$\mathrm{f}(x)=\frac{2(x+2)^2}{2x^2+6x+5}=1+\frac{2x+3}{2x^2+6x+5}$$

$\mathrm{f}'(x)$

$$=\frac{(2x^2+6x+5)(2)-(2x+3)(4x+6)}{(2x^2+6x+5)^2}$$ 1M

$$=\frac{-4(x^2+3x+2)}{(2x^2+6x+5)^2}$$ 1A

----------(2)

(c) $\mathrm{f}'(x)=0$

$x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$

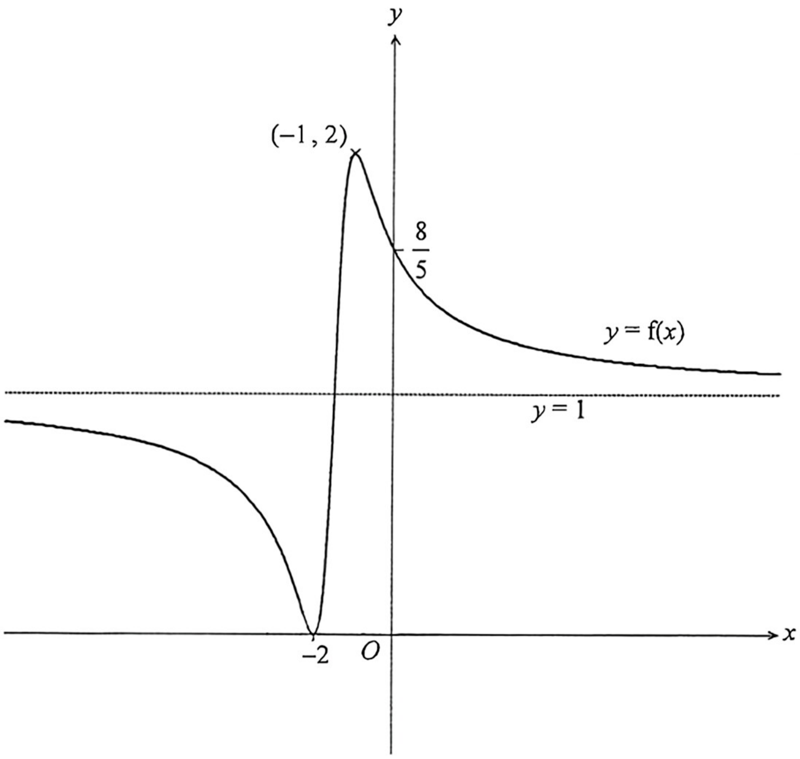
$x=-1$ 或 $x=-2$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
$\mathrm{f}'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\mathrm{f}(x)$	↘	0	↗	2	↘

1M 給測試

因此，G 的極大點及極小點分別為 $(-1,2)$ 及 $(-2,0)$。 1A+1A

----------(3)

解	分	備註
(d) 		
	1M	給形狀
	1M	給漸近線
	1A	給全部正確
	----------(3)	
(e) 所求面積		
$=\int_{-2}^{0}\left(1+\frac{2x+3}{2x^2+6x+5}\right)\mathrm{d}x$	1M	
$=\left[x\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\int_{1}^{5}\frac{1}{u}\mathrm{d}u$ （藉設 $u=2x^2+6x+5$ ）	1M	
$=2+\frac{1}{2}\left[\ln u\right]_{1}^{5}$		
$=\frac{1}{2}\ln 5+2$	1A	
	----------(3)	

解	分	備註
11. (a) 設 $x = a\tan u$ 。	1M	
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = a\sec^2 u$		
$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle= \int \frac{1}{a^2\tan^2 u + a^2}\left(a\sec^2 u\right)\mathrm{d}u$	1M	
$\displaystyle= \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}u$		
$\displaystyle= \frac{u}{a} + C$		
$\displaystyle= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ ，其中 C 為一常數	1A	必須顯示理由
	---------(3)	
(b) 設 $x = -t$ 。	1M	
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1$		
$\displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)}{1+e^{\mathrm{h}(x)}}\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle= -\int_{c}^{-c} \frac{\mathrm{g}(-t)}{1+e^{\mathrm{h}(-t)}}\,\mathrm{d}t$		
$\displaystyle= \int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(t)}{1+e^{-\mathrm{h}(t)}}\,\mathrm{d}t$ （$\because$ $\mathrm{g}(x)$ 為偶及 $\mathrm{h}(x)$ 為奇。）	1M	
$\displaystyle= \int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)}{1+e^{-\mathrm{h}(x)}}\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle 2\int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)}{1+e^{\mathrm{h}(x)}}\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle= \int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)}{1+e^{\mathrm{h}(x)}}\,\mathrm{d}x + \int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)}{1+e^{-\mathrm{h}(x)}}\,\mathrm{d}x$	1M	
$\displaystyle= \int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)\left((1+e^{-\mathrm{h}(x)})+(1+e^{\mathrm{h}(x)})\right)}{(1+e^{\mathrm{h}(x)})(1+e^{-\mathrm{h}(x)})}\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle= \int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)(2+e^{-\mathrm{h}(x)}+e^{\mathrm{h}(x)})}{1+e^{\mathrm{h}(x)}+e^{-\mathrm{h}(x)}+1}\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle= \int_{-c}^{c} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle= 2\int_{0}^{c} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ （$\because$ $\mathrm{g}(x)$ 為偶。）		
$\displaystyle\therefore \int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{g}(x)}{1+e^{\mathrm{h}(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{c} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$	1	

解	分	備註
$\int_{-c}^{c}\frac{g(x)}{1+e^{h(x)}}dx=\int_{-c}^{0}\frac{g(x)}{1+e^{h(x)}}dx+\int_{0}^{c}\frac{g(x)}{1+e^{h(x)}}dx$	1M	
設 $x=-t$。 $\frac{dx}{dt}=-1$	1M	
$\int_{-c}^{0}\frac{g(x)}{1+e^{h(x)}}dx$ $=-\int_{c}^{0}\frac{g(-t)}{1+e^{h(-t)}}dt$		
$=\int_{0}^{c}\frac{g(t)}{1+e^{-h(t)}}dt$ （∵ $g(x)$ 為偶及 $h(x)$ 為奇。）	1M	
$=\int_{0}^{c}\frac{e^{h(t)}g(t)}{e^{h(t)}+1}dt$ $=\int_{0}^{c}\frac{e^{h(x)}g(x)}{1+e^{h(x)}}dx$		
$\int_{-c}^{c}\frac{g(x)}{1+e^{h(x)}}dx$ $=\int_{0}^{c}\frac{e^{h(x)}g(x)}{1+e^{h(x)}}dx+\int_{0}^{c}\frac{g(x)}{1+e^{h(x)}}dx$ $=\int_{0}^{c}\frac{e^{h(x)}g(x)+g(x)}{1+e^{h(x)}}dx$		
$=\int_{0}^{c}g(x)dx$	1	
	----------(4)	

解	分	備註
(c) 設 $g(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{9^x+9^{-x}+7}$ 。		
$g(-x)=\dfrac{3^{-x}+3^x}{9^{-x}+9^x+7}=g(x)$		
所以， $g(x)$ 為一偶函數。		給兩項
設 $h(x)=\sin^3 x$ 。		
$h(-x)=\sin^3(-x)=-\sin^3 x=-h(x)$		
所以， $h(x)$ 為一奇函數。	1M	保留不給 1M 若遺漏步
$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{3^x+3^{-x}}{(1+e^{\sin^3 x})(9^x+9^{-x}+7)}dx$		
$\displaystyle=\int_0^1\frac{3^x+3^{-x}}{9^x+9^{-x}+7}dx$	1M	給利用 (b)
$\displaystyle=\int_0^1\frac{3^x+3^{-x}}{3^{2x}+3^{-2x}+7}dx$		
$\displaystyle=\int_0^1\frac{3^x+3^{-x}}{(3^x-3^{-x})^2+9}dx$		
$\displaystyle=\frac{1}{\ln 3}\int_0^{\frac{8}{3}}\frac{1}{u^2+3^2}du$ （藉設 $u=3^x-3^{-x}$ ）	1M	
$\displaystyle=\frac{1}{3\ln 3}\left[\tan^{-1}\frac{u}{3}\right]_0^{\frac{8}{3}}$	1M	給利用 (a) 的結果
$\displaystyle=\frac{1}{3\ln 3}\tan^{-1}\frac{8}{9}$	1A	
	-----------(5)	

解	分	備註
12. (a) (i) 留意 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -(2\lambda+5) & \lambda & 0 \\ \lambda+2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$		
$= -2\lambda - (2\lambda+5) - \lambda(\lambda+2)$	1M	
$= -\lambda^2 - 6\lambda - 5$		
$= -(\lambda+5)(\lambda+1)$		
漏步! 若 (E) 有唯一解，則 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -(2\lambda+5) & \lambda & 0 \\ \lambda+2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ 。	1M	
故此，可得 $-(\lambda+5)(\lambda+1) \neq 0$ 。		
求解後，可得 $\lambda \neq -5$ 及 $\lambda \neq -1$ 。	1A	
因此，可得 $\lambda < -5$ 、 $-5 < \lambda < -1$ 或 $\lambda > -1$ 。		
(ii) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-(\lambda+5)(\lambda+1)}$	1M	給克萊瑪法則
$= \dfrac{1-2\lambda}{(\lambda+5)(\lambda+1)}$		任何一項
$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -(2\lambda+5) & -1 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-(\lambda+5)(\lambda+1)}$		
$= \dfrac{-5\lambda-14}{(\lambda+5)(\lambda+1)}$		
$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -(2\lambda+5) & \lambda & -1 \\ \lambda+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(\lambda+5)(\lambda+1)}$		
$= \dfrac{-2(\lambda^2+4\lambda+6)}{(\lambda+5)(\lambda+1)}$	1A+1A ----------(6)	1A 給任何一項正確 +1A 給所有正確

解	分	備註
(b) (i) 設 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ，其中 $x, y, z \in \mathbf{R}$ 。 由於 $\mathbf{v}$ 垂直於 $(h+2)\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ，可得 $(h+2)x+y-z=0$ 。	1M	
$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ $=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ h & 2h+5 & -2h \\ x & y & z \end{vmatrix}$ $=\big(2hy+(2h+5)z\big)\mathbf{i}-(2hx+hz)\mathbf{j}+\big(-(2h+5)x+hy\big)\mathbf{k}$	1M	
故此，可得 $-(2hx+hz)=2h$ 及 $-(2h+5)x+hy=-1$ 。 所以，可得 $2x+z=-2$ 及 $-(2h+5)x+hy=-1$ 。 由此，x 、y 及 z 滿足 (E) ，其中 $\lambda=h$ 。 藉 (a)(ii)，可得 $x=\dfrac{1-2h}{(h+5)(h+1)}$ 、 $y=\dfrac{-5h-14}{(h+5)(h+1)}$ 及 $z=\dfrac{-2(h^2+4h+6)}{(h+5)(h+1)}$ 。 因此， $\mathbf{v}=\dfrac{1-2h}{(h+5)(h+1)}\mathbf{i}+\dfrac{-5h-14}{(h+5)(h+1)}\mathbf{j}+\dfrac{-2(h^2+4h+6)}{(h+5)(h+1)}\mathbf{k}$ 。	1M	給利用 (a)(ii) 的結果
留意 $2x+z=-2$ 可得出 $z=-2x-2$ 且 $-(2h+5)x+hy=-1$ 可得出 $hy=(2h+5)x-1$ 。 μ $=2hy+(2h+5)z$ $=2\big((2h+5)x-1\big)+(2h+5)(-2x-2)$	1M	
$=2x(2h+5)-2-2x(2h+5)-4h-10$ $=-4(h+3)$	1A	
(ii) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-4(h+3)\mathbf{i}+2h\,\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 當 $\mathbf{u}$ 及 $\mathbf{v}$ 為鄰邊的平行四邊形的面積為 9 時， $\lvert\mathbf{u}\times\mathbf{v}\rvert=9$ $\sqrt{\big(-4(h+3)\big)^2+(2h)^2+1}=9$	1M	
$5h^2+24h+16=0$ 由於對所有 $h>0$ ， $5h^2+24h+16>0$ ， 所以不存在一 h 的值使得以 $\mathbf{u}$ 及 $\mathbf{v}$ 為鄰邊的平行四邊形的面積為 9 。	1A ----------(7)	必須顯示理由

解	分	備註
13. (a) A^{-1}		
$=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$	1M	
$=\dfrac{-1}{6}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$		
$=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{3} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$		
$A-6A^{-1}$		
$=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{3} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$		
$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	1A	
ABA^{-1}		
$=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{3} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$		
$=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ 6 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{3} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$	1M	
$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$	1A	
	----------(4)	

解	分	備註
(b) $ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$		
$(ABA^{-1})^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^n$		
$AB^nA^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$	1M	
$B^n = A^{-1}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}A$	1M	
B^n $= \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -3^{n-1} & \frac{6^n}{3} \\ \frac{3^n}{6} & \frac{6^n}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$		
$= \begin{pmatrix} 2(3^{n-1}) + \frac{6^n}{3} & -2(3^{n-1}) + \frac{2(6^n)}{3} \\ -3^{n-1} + \frac{6^n}{3} & 3^{n-1} + \frac{2(6^n)}{3} \end{pmatrix}$	1A	
	----------(3)	

解	分	備註
(c) 藉 (a)，可得 $A-6A^{-1}=0$ $A^2-6I=0$ $A^2=6I$	1M	任何一項
$A^2=6I$ $(A^2)^{-1}=(6I)^{-1}$ $(A^{-1})^2=\frac{1}{6}I$		
$A^{2k}B^{2k}(A^{-1})^{2k}$ $=(A^2)^k B^{2k}((A^{-1})^2)^k$ $=(6I)^k B^{2k}\left(\frac{1}{6}I\right)^k$ $=B^{2k}$	1M	
$=\begin{pmatrix} 2(3^{2k-1})+\frac{6^{2k}}{3} & -2(3^{2k-1})+\frac{2(6^{2k})}{3} \\ -3^{2k-1}+\frac{6^{2k}}{3} & 3^{2k-1}+\frac{2(6^{2k})}{3} \end{pmatrix}$		
$(ABA^{-1})^{2k}$ $=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^{2k}$ $=\begin{pmatrix} 3^{2k} & 0 \\ 0 & 6^{2k} \end{pmatrix}$		
留意對所有正整數 k， $-2(3^{2k-1})+\frac{2(6^{2k})}{3}\neq 0$ 。		
因此，不存在一正整數 k 使得 $A^{2k}B^{2k}(A^{-1})^{2k}=(ABA^{-1})^{2k}$ 。	1A	必須顯示理由
	----------(3)	
(d) $A^{999}B^{999}(A^{-1})^{999}$ $=(A^{998})AB^{999}A^{-1}(A^{-1})^{998}$ $=(A^2)^{499}AB^{999}A^{-1}((A^{-1})^2)^{499}$ $=(6I)^{499}AB^{999}A^{-1}\left(\frac{1}{6}I\right)^{499}$ $=AB^{999}A^{-1}$	1M	
$=(ABA^{-1})^{999}$ $=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^{999}$ $=\begin{pmatrix} 3^{999} & 0 \\ 0 & 6^{999} \end{pmatrix}$	1A	必須顯示理由
	----------(2)	

考生表現

單元一（微積分與統計）

本年度共有 2 856 名考生應考，平均得分為 52 分，標準差為 18 分。考生於甲部的表現一般較乙部為佳。

甲部

題號	一般表現
1 (a)	甚佳。超過 90% 的考生求得 a 及 b。
(b) (i)	良好。很多考生能比較 $P(C)P(D)$ 及 $P(C\cap D)$ 以決定 C 與 D 是否獨立，但部分考生計算時犯錯。
(ii)	平平。由於考生在 (b)(i) 誤以為 $P(C)=0.6$，以致本部分的常見錯誤答案為 0.4。
2 (a)	甚佳。超過 75% 的考生得出所求概率。
(b)	平平。部分考生誤以為 $\frac{4}{9}$ 是概率 $P(F'\cap W)$ 且 $\frac{3}{20}$ 為條件概率 $P(W'\|F)$，其中把選出的成員為女性的事件記為 F，且把選出的成員佩戴眼鏡的事件記為 W。將 F 及 W 的互補事件分別記為 F' 及 W'。
3 (a)	甚佳。大約 80% 的考生求得 p 的值。
(b)	良好。部分考生在寫出 k 的值之前遺漏了步驟 $k\ln 0.875<\ln 0.15$。
4 (a)	甚佳。只有少數考生誤寫 $\beta=92.82\%$ 而非 $\beta=92.82$。
(b)	平平。很多考生求得樣本中女生每星期的溫習時間之平均值，但未能繼續求所求的標準差。
5 (a)	甚佳。超過 80% 的考生正確展開 $\frac{2}{e^{nx}}$。
(b)	甚佳。很多考生求得 x^3 的係數。少數考生錯誤考慮 $(1+4x)^m\left(\frac{2}{e^{nx}}\right)$ 而非 $(1+4x)^m+\frac{2}{e^{nx}}$。

題號	一般表現
6 (a) (i)	**甚佳**。超過 85% 的考生能正確地以 $\mathrm{p}(x)\ln(\mathrm{q}(x))$ 的形式表 u。
(ii)	平平。很多考生未能正確地利用 (a)(i) 的答案及鏈式法則求得答案。
(b)	良好。很多考生能利用斜截式或點斜式以及 (a)(ii) 的結果求得所求切線的方程。
7	平平。很多考生未能建立表達圖片面積與 x 的關係的方程，因此未能得出所求的面積的變率。
8 (a)	良好。很多考生能利用標準正態分佈表計算 $\int_0^{0.5} e^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x$。
(b)	平平。部分考生未能察覺所求範圍於 x 軸之下，而部分考生未能把定積分 $-\int_0^{0.5}(2x-1)e^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x$ 寫成 $-2\int_0^{0.5}xe^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x+\int_0^{0.5}e^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x$ 計算。

乙部

題號	一般表現
9 (a)	甚佳。大約 80% 的考生求得 μ 及 σ。
(b)	良好。部分考生把正態隨機變量標準化時誤用 σ 而非 $\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$。
(c) (i)	良好。部分考生錯誤求出 1 個南瓜的價錢的期望值而非所求的手推車內 8 個南瓜的價錢的期望值。
(ii)	平平。部分考生混淆了 P(A 等級) 及 P(C 等級)，此外，很多考生未能寫出正確的組合係數或未能考慮所有可能的組合。
10 (a)	甚佳。超過 85% 的考生正確得出所求概率。
(b)	甚佳。很多考生正確得出所求概率。少數考生利用 (a) 的答案時未有使用足夠的小數位，以致未能求得準確的答案。
(c)	良好。部分考生在該條件概率的分子中，未能寫出正確的組合係數或未能考慮所有可能的組合。部分考生未能察覺所求的是一個條件概率。
(d)	甚差。所求概率為 $$\frac{(3.88e^{-1.6})^7-\left(\frac{e^{-1.6}1.6^1}{1!}+\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}\right)^7-C_1^7\left(\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)\left(\frac{e^{-1.6}1.6^1}{1!}+\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}\right)^6}{1-\left(1-\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)^7-C_1^7\left(\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)\left(1-\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)^6}$$ 。 常見的錯誤包括分子的第一項誤用 1 而非 $(3.88e^{-1.6})^7$ 、在分子中誤用 $\left(1-\frac{e^{-1.6}1.6^0}{0!}\right)$ 而非 $\left(\frac{e^{-1.6}1.6^1}{1!}+\frac{e^{-1.6}1.6^2}{2!}\right)$，以及使用錯誤的分母。
11 (a)	甚佳。很多考生得出正確的答案 $\ln\left(\frac{P}{-t^2+10t+8}\right)=\ln a+bt$ 。
(b)	甚佳。很多考生得出 a 及 b 正確的值。少數考生未有按要求得出真確值。
(c)	平平。很多考生在利用梯形法則時誤用區間 $[7,11]$ 而非 $[0,4]$ 。部分考生使用了沒有定義的記法，如 f(0)、 f(1) 等。
(d) (i)	良好。很多考生利用代換積分法正確得出所求的積分。
(ii)	甚差。很多考生均能考慮 $\frac{d^2P}{dt^2}$ 以判別 (c) 所得估計值的性質，但他們大部分得出錯誤的二階導數，或未能清楚解釋為什麼對 $0\le t\le 4$ 而言，該二階導數小於零。

題號	一般表現
12 (a)	平平。部分考生錯誤考慮 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=0$ 而非 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)=0$。部分考生計算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)$ 時犯錯。此外，部分考生在一階導數判別法的表格中，沒有顯示正確的列的標題（ t 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)$ ）。而此情況下，該測試會被視為錯誤。
(b) (i)	平平。很多考生求所求的總盈利 $\int_0^{12}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-10(0.8)^{2t+3}\right)\mathrm{d}t$ 時犯錯。例如誤以為 $\int_0^{12}10(0.8)^{2t+3}\,\mathrm{d}t=10\left[\frac{0.8^{2t+3}}{\ln 0.8}\right]_0^{12}$ 而非正確答案 $10\left[\frac{0.8^{2t+3}}{2\ln 0.8}\right]_0^{12}$ ，以及 $\int_0^{12}\left(\frac{2e^{0.5t}-5e^{-0.5t}}{2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5}+2\right)\mathrm{d}t=\int_2^{2e^6+5e^{-6}-5}\left(\frac{2}{u}+2\right)\mathrm{d}u$ 而非正確的表達式 $\int_2^{2e^6+5e^{-6}-5}\frac{2}{u}\mathrm{d}u+\int_0^{12}2\mathrm{d}t$ ，其中 $u=2e^{0.5t}+5e^{-0.5t}-5$ 。
(ii)	甚差。部分考生未能以正確的極限的記法 $\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ 建構答案。此外，部分考生在計算該極限的過程中遺漏了重要步驟，例如 $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2-5e^{-t}}{2+5e^{-t}-5e^{-0.5t}}\right)+2-\lim_{t\to\infty}10(0.8)^{2t+3}$ 。

一般建議

考生應：

1. 小心閱讀題目以適當給出所要求的答案或真確值；
2. 掌握組合的數數練習；
3. 掌握基數為非 e 的指數函數的積分；
4. 掌握檢驗極大值或極小值的方法；
5. 掌握極限的記法的應用及極限的計算；
6. 掌握判斷某二階導數為小於或大於零的方法，尤其注意所考慮的區間；及
7. 加倍留意題目要求的最終答案的準確度，故此須令中間步驟的數值保持足夠的準確度。

考生表現

單元二（代數與微積分）

本年度共有 5 524 名考生應考，平均得分為 52 分，標準差為 19 分。考生於甲部的表現一般較乙部為佳。

甲部

題號	一般表現
1 (a)	甚佳。超過 70% 考生能指出 O、A 與 B 共線。部分考生誤以為 O、A 與 B 形成三角形。
(b)	良好。大約 55% 考生能利用 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 3\lvert\overrightarrow{OA}\rvert$ 及 $AB \,//\, OA$ 求 $\overrightarrow{AB}$。部分考生誤以為 $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{OA}$ 或 $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{OA}$。
2 (a)	甚佳。超過 80% 考生能把分子及分母同時乘以 $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ 而求得極限。
(b)	平平。大部分考生能寫出 $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}}}{h}$。但由此很多考生把分子及分母同時乘以 $e^{\sqrt{x+h}}+e^{\sqrt{x}}$ 且誤以為 $(e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}})(e^{\sqrt{x+h}}+e^{\sqrt{x}}) = e^{x+h}-e^{x}$。
3 (a)	甚佳。大約 70% 考生能利用二項式定理展開該表達式。
(b)	甚佳。大部分考生能求得 m 的值及 x^{60} 的系數。部分考生寫出通項 $C_r^{24}(x^3)^{24-r}\left(\dfrac{-2}{x}\right)^r$ 但誤以為第 19 項對應 $r=19$；部分考生求 x^{60} 的係數時遺漏了負號。
4 (a)	甚佳。大約 85% 考生能利用合適的三角恆等式來完成證明。
(b)	良好。大部分考生能利用 (a) 的結果得出 $\tan\dfrac{3\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}=1$，但部分考生誤以為由此可得出 $\tan\dfrac{3\theta}{2}=1$ 或 $\tan\dfrac{\theta}{2}=1$。
5 (a)	良好。大約半數考生能利用分部積分法兩次得出結果。惟部分考生遺漏了積分常數。
(b)	良好。大部分考生能利用恆等式 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 及 (a) 的結果計算該積分，但很多考生未能化簡答案。部分考生利用 (a) 的結果時誤將 $1+(2\pi)^2$ 寫成 $1+2\pi^2$。

題號	一般表現
6 (a)	甚佳。大約 60% 考生能利用高斯消去法求得一般解。惟部分考生未有指出一般解中的參數 t 為實數。
(b)	良好。很多考生能利用 (a) 的結果及合適的三角恆等式得出一條可容易求解的方程。但部分考生未能小心處理所有可能的情況，沒有捨去範圍以外的解以得出正確結論。
7 (a)	甚佳。大約 65% 考生能利用隱函數求導法得出答案。
(b)	平平。很多考生能設 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\|_{(h,k)}=\frac{-1}{2}$，其中 (h,k) 為所求切線的切點的坐標。但部分考生嘗試以 h 表 k 時，在兩個情況中遺漏了其一。部分考生錯誤嘗試求同時滿足 $x+2y+1=0$ 及 $x^2y+2xy^2+8=0$ 的 h、k。
8 (a)	甚佳。超過 65% 考生能利用數學歸納法完成證明。部分考生未有定義之下使用如 P(n) 等記法，或使用不恰當的定義，例如定義 P(n) 為 $\sum_{r=1}^{n} r(2^{-r})$（此並非一命題）。在歸納假設中，部分考生錯誤假設 P(k) 對*所有*正整數 k 正確。
(b) (i)	良好。超過 60% 考生能利用 (a) 的結果求得答案。但部分考生錯誤把答案化簡成 $1001(2^{-999})+2001(2^{-1999})$。部分考生得出錯誤的結論 $1001(2^{-999})-2001(2^{-1999})=0$。
(ii)	甚差。甚少考生能利用 (b)(i) 求得答案。
9 (a)	良好。很多考生利用公式 $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ 完成証明。而小部分考生能利用正弦公式及/或餘弦公式完成証明。
(b) (i)	良好。大約半數考生能建立一方程以解 T。但部分考生未有化簡答案，以 $\sqrt{12.5}$ 或 $\frac{\sqrt{50}}{2}$ 等表達式作為最終答案。
(ii)	平平。大部分嘗試作答本部分的考生對等式的兩邊對 t 求導數，但卻因不同的計算錯誤，以致部分考生未能得出正確答案。

乙部

題號	一般表現
10 (a)	甚佳。超過 60% 考生藉考慮 $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ 或把 $f(x)$ 表為 $1+\frac{2x+3}{2x^2+6x+5}$ 的形式，求得水平漸近線。部分考生誤以為 $x=\frac{-3}{2}$ 是一垂直漸近線。
(b)	甚佳。超過 75% 考生能利用商法則或積法則求得答案。對沒有把 $f(x)$ 表為 $1+\frac{2x+3}{2x^2+6x+5}$ 的形式的考生而言，化簡答案一般較為困難。
(c)	甚佳。超過 60% 考生能利用合適的測試求得極大點及極小點。
(d)	平平。部分考生錯誤繪出兩條分別在漸近線之上及之下的曲線。很多考生沒有標示漸近線、該曲線及/或曲線上重要的點，例如 y 截距。
(e)	良好。大約一半考生知悉計算積分 $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 能求得該面積。當中大部分考生能利用代換積分法或其他合適的積分技巧求得答案。
11 (a)	甚佳。大部分考生能利用代換 $x=a\tan u$ 求得該積分。但部分考生在答案遺漏了積分常數。部分考生誤寫 $\int \frac{1}{a}\mathrm{d}u=\ln\|u\|+C$，亦有部分考生沒有在最終答案把 u 轉換回 x。
(b)	平平。少於一半考生能利用合適的代換及奇函數及偶函數的特性證明該等式。
(c)	甚差。部分考生能識別偶函數 $\frac{3^x+3^{-x}}{9^x+9^{-x}+7}$ 為 $g(x)$ 且奇函數 $\sin^3 x$ 為 $h(x)$，但部分考生誤選 $g(x)=3^x+3^{-x}$ 及 $h(x)=e^{\sin^3 x}$。利用正確的識別，考生能利用 (b) 的結果把所求的積分轉換成 $\int_0^1 \frac{3^x+3^{-x}}{9^x+9^{-x}+7}\mathrm{d}x$。但甚少考生在計算該積分時能使用正確的代換 $u=3^x-3^{-x}$。很多考生嘗試代換 $u=3^x+3^{-x}$ 而未能成功。

題號	一般表現
12(a) (i)	甚佳。超過 65% 考生藉考慮 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -(2\lambda+5) & \lambda & 0 \\ \lambda+2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ 求得 λ 值的範圍，但部分考生寫出錯誤答案「$\lambda \neq -5$ 或 $\lambda \neq -1$」，而非「$\lambda \neq -5$ 及 $\lambda \neq -1$」。
(ii)	良好。很多考生能利用克萊瑪法則以 λ 表 x、y 及 z。但部分考生計算 Δ_x、Δ_y 及 Δ_z 時犯錯。此外，部分考生因在 (a)(i) 把形如 $-\lambda^2-6\lambda-5\neq 0$ 的不等式轉換成 $\lambda^2+6\lambda+5\neq 0$，故在本部中把 $\Delta=-\lambda^2-6\lambda-5$ 誤寫成 $\Delta=\lambda^2+6\lambda+5$。
(b) (i)	平平。部分考生能利用給定的條件，即 $\mathbf{v}$ 垂直於 $(h+2)\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mu\mathbf{i}+2h\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 建立方程。但甚少考生能察覺與 (a) 的關係並應用其結果；部分考生把計算重頭做起。
(ii)	甚差。由於只有少數考生能完成 (b)(i)，甚少考生嘗試本部分。大部分嘗試作答本部分的考生能寫出相關平行四邊形面積的方程，部分考生能解該方程並得出正確結論。部分考生得出二次方程 $5h^2+24h+16=0$，卻因方程的判別式為正數而誤得答案為「存在」這錯誤結論。
13 (a)	甚佳。超過 55% 考生求得 A 的逆矩陣，並完成矩陣乘法求得正確答案。
(b)	良好。很多考生能使用矩陣的特性推論出 $B^n=A^{-1}D^nA$，其中 D 為 (a) 當中 ABA^{-1} 的答案。但由於運算錯誤或未能化簡答案，並非很多考生能得出正確答案 $B^n=\begin{pmatrix} 2(3^{n-1})+\frac{6^n}{3} & -2(3^{n-1})+\frac{2(6^n)}{3} \\ -3^{n-1}+\frac{6^n}{3} & 3^{n-1}+\frac{2(6^n)}{3} \end{pmatrix}$ 或其等價的形式。
(c)	甚差。甚少考生能察覺 $A^2=6I$ 及 $(A^{-1})^2=\frac{1}{6}I$ 以繼續計算。部分考生誤以為 $A^{2k}B^{2k}(A^{-1})^{2k}=(ABA^{-1})^{2k}$ 對所有正整數 k 成立，並嘗試利用數學歸納法証明之。
(d)	甚差。很多考生未有証明之下直接給出等式 $A^{999}B^{999}(A^{-1})^{999}=(ABA^{-1})^{999}$。儘管該等式在本部分的情況成立，它在一般情況下並不成立，因此考生須提供足夠步驟以證明該等式正確。

一般建議

考生應：

1. 尤其在證明恆等式時，詳列出所有步驟；
2. 利用恰當的數學符號與詞彙，例如
   - (a) 分辨「及」與「或」；
   - (b) 分辨矩陣與行列式；
   - (c) 計算極限時，僅當需要時寫出「lim」；
   - (d) 在積分中恰當寫出「dx」。
3. 充分理解不同的數學概念，例如
   - (a) 行列式僅應用於方矩陣，因此例如在第 6 題中，由於係數矩陣並非方矩陣，因此不能討論該係數矩陣的行列式。而在第 6 及 12 題中，由於 (E) 並非矩陣，因此，「det E」並無意義。
   - (b) 只有命題才有真假值。因此，如在利用數學歸納法証明該命題對參數（例如 n）的所有正整數值成立時，寫出「$n=k$ 為真」等並無意義。及
4. 掌握向量的基本概念。