評卷參考

單元二（代數與微積分）

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生以及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

一般閱卷原則

1. 評卷時，閱卷員須跟循評卷參考的評分標準給分，這是十分重要的。很多時考生會運用評卷參考以外的方法而得到正確答案，一般來說，只要運用合理的方法而取得正確答案，該考生應可獲得該部分的**所有分數**（除題目特別指明特定方法外）。閱卷員應有耐性地評閱評卷參考以外的解題方法。

2. 在評卷參考中，分數會分為下列三類：

「M」分	使用正確方法的得分；
「A」分	正確答案的得分；
沒有「M」或「A」的分	正確地完成證題或推演得題目所給的答案的得分。

某些題目由數部分組成，而較後部分的答案卻需依賴較前部分所得的結果。在這情況下，若考生因為前部分錯誤的結果而導致後部分的答案錯誤，但卻能運用正確的方法去解題，則方法正確的步驟可給「M」分，而相應的答案將沒有「A」分（除特別指明外）。

3. 為方便閱卷員評卷，評卷參考已盡量詳盡。當然，考生的答案多不會如評卷參考般清楚列寫出來，諸如欠缺某幾個步驟或將步驟隱含於字裏行間。如遇到類似情況，閱卷員應運用他們的專業知識去判斷是否給分。一般來說，如考生的答案顯示他已運用相關的概念或技巧，則該部分應予給分。

4. 評卷時遇有不清楚的地方，應以考生的利益為依歸。

5. 評卷參考中，塗上陰影的部分代表可省略的步驟，$\boxed{\text{有外框的部分}}$代表運用不同方法的答案。所有分數答案必須化簡。

6. 除在題目中特別指明外，不以真確值表示的數值答案均不被接受。

解	分	備註
1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^5+4)$		
$=\lim_{h\to 0}\frac{((x+h)^5+4)-(x^5+4)}{h}$	1M	
$=\lim_{h\to 0}\frac{x^5+5hx^4+10h^2x^3+10h^3x^2+5h^4x+h^5+4-x^5-4}{h}$	1M	給二項展開式
$=\lim_{h\to 0}(5x^4+10hx^3+10h^2x^2+5h^3x+h^4)$	1M	保留不給 1M 若遺漏步驟
$=5x^4$	1A	
	----------(4)	
2. (a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$		
$=x\cos x+\sin x-\sin x$	1M	給積法則
$=x\cos x$	1A	
$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$		
$=-x\sin x+\cos x$	1A	
(b) $x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy$		
$=x(-x\sin x+\cos x)+kx\cos x+x(x\sin x+\cos x)$ （藉 (a)）	1M	給利用 (a) 的結果
$=(2+k)x\cos x$		
由於對所有 x 的實數值，$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=0$，可得 $k=-2$。	1A	
	----------(5)	

解	分	備註
3. (a) $\int \frac{1}{e^{2u}} \mathrm{d}u$		
$= \int e^{-2u} \mathrm{d}u$	1M	
$= \frac{-1}{2} e^{-2u} + 常數$	1A	
(b) 設 $u = \sqrt{x}$ ，則可得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 。	1M	
$\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}}} \mathrm{d}x$		
$= \int_1^3 \frac{2}{e^{2u}} \mathrm{d}u$	1M+1A	
$= 2\int_1^3 \frac{1}{e^{2u}} \mathrm{d}u$		
$= 2\left[\frac{-1}{2} e^{-2u}\right]_1^3$ （藉 (a)）	1M	給利用 (a) 的結果
$= \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^6}$	1A	
	----------(7)	
4. (a) $\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$		
$= \frac{1}{3} \int \ln x \,\mathrm{d}x^3$		
$= \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^3 \,\mathrm{d} \ln x\right)$	1M	給分部積分法
$= \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^2 \,\mathrm{d}x\right)$	1A	
$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + 常數$	1A	
(b) y		
$= \int 9x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$	1M	
$= 9\left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3\right) + C$ （藉 (a)）	1M	給利用 (a) 的結果
$= 3x^3 \ln x - x^3 + C$ ，其中 C 為一常數		
由於 Γ 通過點 $(1, 4)$ ，可得 $4 = 3\ln 1 - 1 + C$ 。	1M	
求解後，可得 $C = 5$ 。		
因此，Γ 的方程為 $y = 3x^3 \ln x - x^3 + 5$ 。	1A	
	----------(7)	

解	分	備註
5. (a) 增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$ 。	1M	
因此，解集為 $\{(2-6t, 5t, t) : t \in \mathbf{R}\}$ 。	1A	
(b) 把 $(x, y, z) = (2-6t, 5t, t)$ 代入最後的方程，可得 $3(2-6t)+2(5t)+kt=6$ 。 故此，可得 $(k-8)t=0$ 。	1M	
現考慮 $k=8$ 及 $k \neq 8$ 的情況。	1M	
情況 1： $k=8$ (b) 的線性方程組與 (a) 的線性方程組等價。 因此，解集為 $\{(2-6t, 5t, t) : t \in \mathbf{R}\}$ 。	1M	
情況 2： $k \neq 8$ 故此，可得 $t=0$ 。 因此，解為 $(2, 0, 0)$ 。	1A	
增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & k & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & k-8 & 0 \end{array}\right)$ 。	1M	
現考慮 $k=8$ 及 $k \neq 8$ 的情況。	1M	
情況 1： $k=8$ 在這情況下，增廣矩陣變為 $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 。 因此，解集為 $\{(2-6t, 5t, t) : t \in \mathbf{R}\}$ 。	1M	
情況 2： $k \neq 8$ 解為 $(2, 0, 0)$ 。	1A	
	----------(6)	

解	分	備註
6. (a) 留意 $\lvert M^T \rvert = \lvert M \rvert$ 及 $\lvert -M \rvert = -\lvert M \rvert$ 。	1M	任何一項
由於 $\lvert M^T \rvert = \lvert -M \rvert$ ，可得 $\lvert M \rvert = -\lvert M \rvert$ 。		
故此，可得 $2\lvert M \rvert = 0$ 。		
因此，可得 $\lvert M \rvert = 0$ 。	1	
(b) (i) $A+I$ $= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -8 \\ -b & 8 & 0 \end{pmatrix}$		
故此，可得 $(A+I)^T = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & 8 \\ b & -8 & 0 \end{pmatrix} = -(A+I)$ 。	1M	
藉 (a)，可得 $\lvert A+I \rvert = 0$ 。	1	
$A+I$ $= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -8 \\ -b & 8 & 0 \end{pmatrix}$ $\lvert A+I \rvert$ $= \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -8 \\ -b & 8 & 0 \end{vmatrix}$		
$= 0 + 8ab - 8ab - 0 - 0 - 0$	1M	
$= 0$	1	
(ii) 留意 $A^3 + I = (A+I)(A^2 - A + I)$ 。	1M	
$\lvert A^3 + I \rvert$ $= \lvert A+I \rvert \lvert A^2 - A + I \rvert$ $= (0)\lvert A^2 - A + I \rvert$ （藉 (b)(i)） $= 0$ 所以， $A^3 + I$ 為一奇異矩陣。		
因此，同意該宣稱。	1A -----------(6)	必須顯示理由

解	分	備註
7. (a) $\sin^2 x\cos^2 x$		
$=\dfrac{(2\sin x\cos x)^2}{4}$		
$=\dfrac{\sin^2 2x}{4}$	1M	
$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1-\cos 4x}{2}\right)$		
$=\dfrac{1-\cos 4x}{8}$	1	
(b) (i) $f(x)$		
$=\sin^4 x+\cos^4 x$		
$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$	1M	
$=1^2-2\left(\dfrac{1-\cos 4x}{8}\right)$ (藉 (a))	1M	給利用 (a)
$=\dfrac{1}{4}\cos 4x+\dfrac{3}{4}$	1A	
(ii) $8f(x)=7$		
$8\left(\dfrac{1}{4}\cos 4x+\dfrac{3}{4}\right)=7$ (藉 (b)(i))	1M	給利用 (b)(i) 的結果
$2\cos 4x+6=7$		
$\cos 4x=\dfrac{1}{2}$		
$4x=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $4x=\dfrac{5\pi}{3}$		
$x=\dfrac{\pi}{12}$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{12}$	1A	給兩項
	----------(7)	

解	分	備註
8. (a) 留意 $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(1+1)x}{2}=\sin\frac{x}{2}\cos x$ 。 故此，對 $n=1$ ， 命題為真。	1	
假設對某些正整數 m ， $\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{m}\cos kx=\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{(m+1)x}{2}$ 。	1M	
$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{m+1}\cos kx$ $=\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{m}\cos kx+\sin\frac{x}{2}\cos(m+1)x$		
$=\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{(m+1)x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos(m+1)x$ （藉歸納法假設）	1M	
$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2m+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2m+3)x}{2}-\sin\frac{(2m+1)x}{2}\right)$	1M	
$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2m+3)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$		
$=\cos\frac{(2m+4)x}{4}\sin\frac{(2m+2)x}{4}$	1M	
$=\sin\frac{(m+1)x}{2}\cos\frac{(m+2)x}{2}$ 故此，若對 $n=m$ ， 命題為真，則對 $n=m+1$ ， 命題為真。 藉數學歸納法，對所有正整數 n ， 可得		
$\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}$ 。	1	
(b) 把 $x=\frac{\pi}{7}$ 及 $n=567$ 代入 (a)，可得 $\sum_{k=1}^{567}\cos\frac{k\pi}{7}$		
$=\dfrac{\sin\frac{(567)(\pi)}{(2)(7)}\cos\frac{(568)(\pi)}{(2)(7)}}{\sin\frac{\pi}{(2)(7)}}$	1M	
$=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{14}\right)}{\sin\frac{\pi}{14}}$ $=\dfrac{-\sin\frac{\pi}{14}}{\sin\frac{\pi}{14}}$		
$=-1$	1A ----------(8)	

解	分	備註
9. (a) $f'(x)$		
$=\dfrac{(x-2)(2x)-(x^2+12)}{(x-2)^2}$	1M	給商法則
$=\dfrac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}$	1A	
	-----------(2)	
(b) 留意 $f'(x)=\dfrac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$ 。		
故此，可得 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ 或 $x=6$ 。	1A	
(see table below)	1M	
因此，$f(x)$ 的極大值及極小值分別為 -4 及 12 。	1+1	

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	$(2,6)$	6	$(6,\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗	-4	↘	↘	12	↗

解	分	備註
留意 $f'(x)=\dfrac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$ 及 $f''(x)=\dfrac{32}{(x-2)^3}$ 。		
故此，可得 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ 或 $x=6$ 。	1A	
再者留意 $f''(-2)=\dfrac{-1}{2}<0$ 及 $f''(6)=\dfrac{1}{2}>0$ 。	1M	
又再留意 $f(-2)=-4$ 及 $f(6)=12$ 。		
因此，$f(x)$ 的極大值及極小值分別為 -4 及 12 。	1+1	
	-----------(4)	
(c) 垂直漸近線的方程為 $x-2=0$ 。	1A	
留意 $f(x)=x+2+\dfrac{16}{x-2}$ 。	1M	
因此，斜漸近線的方程為 $y=x+2$ 。	1A	
	-----------(3)	
(d) $\dfrac{x^2+12}{x-2}=14$		
$x^2-14x+40=0$		
$x=4$ 或 $x=10$	1A	可以被包含
所求的面積		
$=\displaystyle\int_4^{10}\left(14-\frac{x^2+12}{x-2}\right)dx$	1M	
$=\displaystyle\int_4^{10}\left(12-x-\frac{16}{x-2}\right)dx$		
$=\left[12x-\dfrac{x^2}{2}-16\ln(x-2)\right]_4^{10}$	1M	
$=30-32\ln 2$	1A	
	-----------(4)	

解	分	備註
10. (a) (i) $\overrightarrow{OQ}$		
$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$	1M	任何一項
$\overrightarrow{OC}$		
$=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OR}$		
$=(1-t)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+t\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)$		
$=\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3t}{4}\overrightarrow{OB}$	1A	可以被包含
留意 C 在 OQ 上。		
故此，可得 $\frac{1-t}{2}:\frac{2}{3}=\frac{3t}{4}:\frac{1}{3}$ 。	1M	
因此，可得 $t=\frac{1}{4}$ 。	1A	
(ii) 藉 (a)(i)，可得 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{16}\overrightarrow{OB}$ 。	1M	給利用 (a)(i)
所以，可得 $\overrightarrow{OC}=\frac{9}{16}\overrightarrow{OQ}$ 。	1M	
由此，可得 $\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\frac{9}{16}\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|$ 。		
故此，可得 $OC:OQ=9:16$ 。		
因此，可得 $CQ:OQ=7:16$ 。	1A	
	(7)	
(b) (i) ΔOAB 的面積		
$=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right\|$	1M	
$=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 20 & -6 & -12 \\ 16 & -16 & 0 \end{vmatrix}\right\|$		
$=\frac{1}{2}\|-192\mathbf{i}-192\mathbf{j}-224\mathbf{k}\|$		
$=176$	1A	
(ii) 四面體 $ABCD$ 的體積		
$=\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB})\right\|$	1M	
$=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{7}{16}\right)\left\|\overrightarrow{OD}\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\right\|$ （藉 (a)(ii)）	1M	給利用 (a)(ii) 的結果
$=\frac{7}{96}\|(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k})\cdot(-192\mathbf{i}-192\mathbf{j}-224\mathbf{k})\|$ （藉 (b)(i)）		
$=\left(\frac{7}{96}\right)(576)$		
$=42$	1A	

解	分	備註
由於 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{16}\overrightarrow{OB}$ ，可得 $\overrightarrow{OC}=\frac{21}{2}\mathbf{i}-\frac{21}{4}\mathbf{j}-\frac{9}{2}\mathbf{k}$ 。	1M	
$\overrightarrow{CA}=\frac{19}{2}\mathbf{i}-\frac{3}{4}\mathbf{j}-\frac{15}{2}\mathbf{k}$		
$\overrightarrow{CB}=\frac{11}{2}\mathbf{i}-\frac{43}{4}\mathbf{j}+\frac{9}{2}\mathbf{k}$		
$\overrightarrow{CD}=\frac{-19}{2}\mathbf{i}+\frac{33}{4}\mathbf{j}-\frac{3}{2}\mathbf{k}$		
四面體 $ABCD$ 的體積		
$=\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB})\right\|$	1M	
$=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}\frac{-19}{2} & \frac{33}{4} & \frac{-3}{2}\\ \frac{19}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{-15}{2}\\ \frac{11}{2} & \frac{-43}{4} & \frac{9}{2}\end{vmatrix}\right\|$		
$=\frac{252}{6}$		
$=42$	1A	
	-----------(5)	

解	分	備註
11. (a) (i) AB		
$=\dfrac{1}{(\lambda-\mu+2)^2}\begin{pmatrix}\lambda-\mu+1 & 1\\ \lambda-\mu+1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\lambda+\mu-1 & \lambda-\mu+1\end{pmatrix}$	1M	
$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$		任何一項
BA		
$=\dfrac{1}{(\lambda-\mu+2)^2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\lambda+\mu-1 & \lambda-\mu+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-\mu+1 & 1\\ \lambda-\mu+1 & 1\end{pmatrix}$		給兩項
$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	1A	
$A+B$		
$=\dfrac{1}{\lambda-\mu+2}\left[\begin{pmatrix}\lambda-\mu+1 & 1\\ \lambda-\mu+1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\lambda+\mu-1 & \lambda-\mu+1\end{pmatrix}\right]$		
$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	1A	
(ii) A^2		
$=A(I-B)$ （藉 (a)(i)）	1M	
$=A-AB$		
$=A-0$ （藉 (a)(i)）		任何一項
$=A$		
B^2		
$=B(I-A)$ （藉 (a)(i)）		給兩項
$=B-BA$		
$=B-0$ （藉 (a)(i)）		
$=B$	1	
(iii) $(\lambda+1)A+(\mu-1)B$		
$=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-\mu+2}(I-\mu I+M)+\dfrac{\mu-1}{\lambda-\mu+2}(I+\lambda I-M)$		
$=\dfrac{-\mu\lambda+\lambda-\mu+1}{\lambda-\mu+2}I+\dfrac{\lambda+1}{\lambda-\mu+2}M+\dfrac{\mu\lambda-\lambda+\mu-1}{\lambda-\mu+2}I-\dfrac{\mu-1}{\lambda-\mu+2}M$		
$=M$	1	
故此，可得 $M=(\lambda+1)A+(\mu-1)B$ 。		
M^2		
$=((\lambda+1)A+(\mu-1)B)((\lambda+1)A+(\mu-1)B)$		
$=(\lambda+1)^2A^2+(\lambda+1)(\mu-1)AB+(\lambda+1)(\mu-1)BA+(\mu-1)^2B^2$		
$=(\lambda+1)^2A+(\mu-1)^2B$ （藉 (a)(i) 及 (a)(ii)）	1M	給利用 (a)(i) 及 (a)(ii)
M^3		
$=M^2M$		
$=((\lambda+1)^2A+(\mu-1)^2B)((\lambda+1)A+(\mu-1)B)$		
$=(\lambda+1)^3A^2+(\lambda+1)^2(\mu-1)AB+(\lambda+1)(\mu-1)^2BA+(\mu-1)^3B^2$		
$=(\lambda+1)^3A+(\mu-1)^3B$ （藉 (a)(i) 及 (a)(ii)）		
因此，可得 $M^n=(\lambda+1)^nA+(\mu-1)^nB$ 。	1	

解	分	備註
$(\lambda+1)A+(\mu-1)B$ $=\frac{\lambda+1}{\lambda-\mu+2}\begin{pmatrix}\lambda-\mu+1 & 1\\ \lambda-\mu+1 & 1\end{pmatrix}+\frac{\mu-1}{\lambda-\mu+2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\lambda+\mu-1 & \lambda-\mu+1\end{pmatrix}$ $=\frac{1}{\lambda-\mu+2}\begin{pmatrix}\lambda^2-\lambda\mu+2\lambda & \lambda-\mu+2\\ (\lambda-\mu+1)(\lambda-\mu+2) & \lambda\mu-\mu^2+2\mu\end{pmatrix}$ $=M$	1	
故此，對 $n=1$ ，命題為真。 假設 $M^k=(\lambda+1)^kA+(\mu-1)^kB$ ，其中 k 為一正整數。 M^{k+1} $=MM^k$ $=((\lambda+1)A+(\mu-1)B)((\lambda+1)^kA+(\mu-1)^kB)$ $=(\lambda+1)^{k+1}A^2+(\lambda+1)(\mu-1)^kAB+(\lambda+1)^k(\mu-1)BA+(\mu-1)^{k+1}B^2$ $=(\lambda+1)^{k+1}A+(\mu-1)^{k+1}B$ （藉 (a)(i) 及 (a)(ii)）	1M	
故此，若對 $n=k$ ，命題為真，則對 $n=k+1$ ，命題為真。 藉數學歸納法，可得 $M^n=(\lambda+1)^nA+(\mu-1)^nB$ 。	1	
	----------(8)	
(b) 留意 $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}^{315}=2^{315}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{315}$ 。	1M	
再者留意 $3-2=1\neq 2$ 及 $2-3+1=0$ 。	1M	保留不給 1M 若遺漏檢驗
把 $\lambda=2$ 、 $\mu=3$ 及 $n=315$ 代入 (a)(iii)，可得	1M	
$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}^{315}$ $=\frac{(2^{315})(3^{315})}{1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{(2^{315})(2^{315})}{1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}2^{630} & 6^{315}-2^{630}\\ 0 & 6^{315}\end{pmatrix}$	1A	
$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6-4\\ 0 & 6\end{pmatrix}$	1M	
$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4 & 6-4\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6-4\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^2 & 6^2-4^2\\ 0 & 6^2\end{pmatrix}$	1M	
$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}4^2 & 6^2-4^2\\ 0 & 6^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6-4\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^3 & 6^3-4^3\\ 0 & 6^3\end{pmatrix}$	1M	保留不給 1M 若遺漏步驟
$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix}^{315}=\begin{pmatrix}4^{315} & 6^{315}-4^{315}\\ 0 & 6^{315}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{630} & 6^{315}-2^{630}\\ 0 & 6^{315}\end{pmatrix}$	1A	
	----------(4)	

解	分	備註
12. (a) (i) 解 $\begin{cases}3x+y-9=0\\x^2-4y+8=0\end{cases}$ ，可得 $x^2+12x-28=0$ 。	1M	
故此，可得 $x=2$ 或 $x=-14$ （捨去）。		
因此， B 的坐標為 $(2,3)$ 。	1A	
(ii) 所求的容量		
$=\int_0^3 \pi\left(\frac{9-y}{3}\right)^2 \mathrm{d}y+\int_3^h \pi(4y-8)\,\mathrm{d}y$	1M+1M+1A	
$=\pi\int_0^3\left(9-2y+\frac{y^2}{9}\right)\mathrm{d}y+\pi\int_3^h(4y-8)\,\mathrm{d}y$		
$=\pi\left[9y-y^2+\frac{y^3}{27}\right]_0^3+\pi\left[2y^2-8y\right]_3^h$	1M	任何一項
$=\pi(2h^2-8h+25)$	1	
	----------(7)	
(b) (i) 把 $x=6$ 代入 $x^2-4y+8=0$ ，可得 $y=11$ 。	1M	
所求的容量		
$=\pi(2(11)^2-8(11)+25)$ （藉 (a)(ii) ）		
$=179\pi\ \mathrm{cm}^3$	1A	
(ii) 設 h cm 為於時間 t s 時該杯內的水深。		
再設 p cm 為當在該杯內的水的體積是 $35\pi\ \mathrm{cm}^3$ 時的水深。		
留意平截頭體的體積為 $19\pi\ \mathrm{cm}^3$ 。		
由於 $35\pi>19\pi$ ，可得 $p>3$ 。	1M	保留不給 1M 若遺漏檢驗
藉 (a)(ii)，可得 $\pi(2p^2-8p+25)=35\pi$ 。		
化簡後，可得 $p^2-4p-5=0$ 。	1M	給 $k_1p^2+k_2p+k_3=0$
求解後，可得 $p=5$ 或 $p=-1$ （捨去因為 $3<p\le 11$ ）。		
由此，可得 $p=5$ 。		
設 $V\ \mathrm{cm}^3$ 為於時間 t s 時該杯內的水的體積。		
對 $3<h\le 11$ ，可得 $V=\pi(2h^2-8h+25)$ （藉 (a)(ii) ）。		
故此，對 $3<h\le 11$ ，可得 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\pi(4h-8)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ 。	1M	
由於 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right\|_{h=5}=24\pi$ ，可得 $24\pi=\pi(4(5)-8)\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right\|_{h=5}$ 。		
所以，可得 $\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right\|_{h=5}=2$ 。	1A	
因此，所求的變率為 2 cm/s 。		
	----------(6)	