

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）

試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

1. 宣布開考後，考生須首先在第1頁之適當位置填寫考生編號，並在第1、3、5、7、9、11、13及15頁之適當位置貼上電腦條碼。
2. 試卷內各題均須作答。答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
3. 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每一紙張均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於簿內。
4. 除特別指明外，所有算式須詳細列出。
5. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值表示。
6. 試題雖用黑體字母如 \mathbf{u} 表示向量，惟考生答題時應採用適當符號如 \bar{u} 。
7. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
8. 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號

參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

甲部 (50分)

1. 從基本原理求 $\frac{d}{dx}(\sin 2x)$ 。

(4分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 假設在 $(1+ax)^n$ 的展式中 x 和 x^2 項的係數分別為 -20 和 180 ，求 a 和 n 的值。

(4分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 以數學歸納法，證明對所有正整數 n ，

$$1 + \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{4n+1}{3n+1}。$$

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 某曲線於任意點 (x, y) 的斜率為 $\frac{dy}{dx} = e^x - 1$ 。已知該曲線通過點 $(1, e)$ 。

(a) 求該曲線的方程。

(b) 求該曲線於曲線與 y 軸交點的切線方程。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 考慮一連續函數 $f(x) = \frac{3-3x^2}{3+x^2}$ 。已知

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+

(「+」與「-」分別標示「正值」與「負值」。)

- (a) 求所有極大及/或極小點和拐點。
 (b) 求 $y=f(x)$ 的圖像的漸近線。
 (c) 在第 7 頁中描繪 $y=f(x)$ 的圖像。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6.

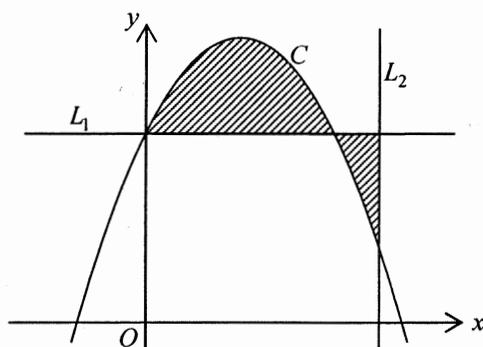


圖 1

圖 1 顯示由 $C: y = \frac{-x^2}{2} + 2x + 4$ 、 $L_1: y = 4$ 和 $L_2: x = 5$ 圍成的陰影區域。已知 C 與 L_1 相交於 $(0, 4)$ 和 $(4, 4)$ 。

- (a) 求陰影區域的面積。
- (b) 求把陰影區域繞 L_1 旋轉所得旋轉體的體積。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. (a) 證明恆等式 $\tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ 。

(b) 利用(a)，證明恆等式 $\tan y = \frac{\sin 8y \cos 4y \cos 2y}{(1 + \cos 8y)(1 + \cos 4y)(1 + \cos 2y)}$ 。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 設 M 為矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，其中 $k \neq 0$ 。

(a) 求 M^{-1} 。

(b) 若 $M \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，求 k 的值。

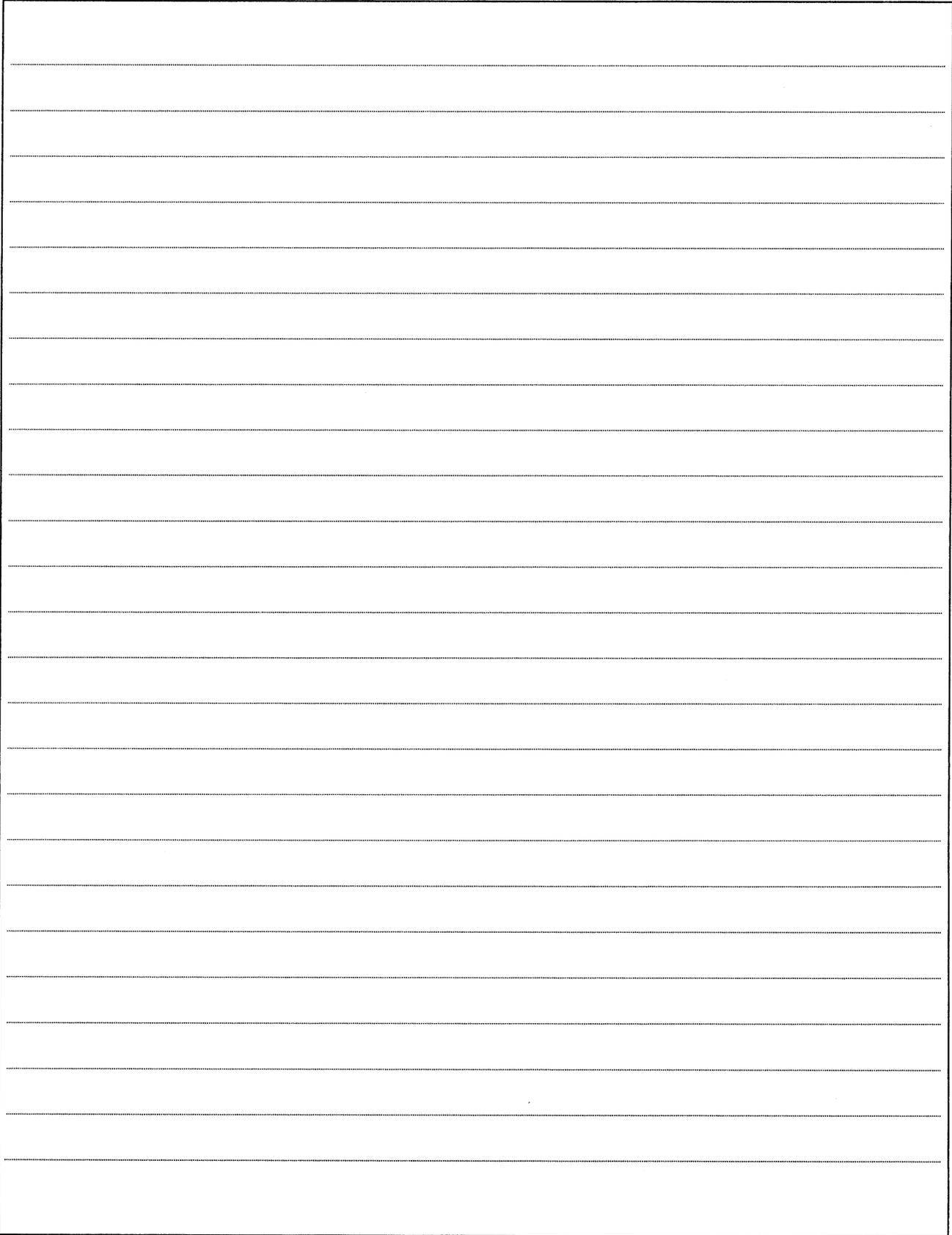
(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 考慮下列 x 、 y 和 z 的線性方程組

$$(E) \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ 2x + (1-2a)y + (2-b)z = a+4 \\ 3x + (1-3a)y + (3-ab)z = 4 \end{cases}, \text{ 其中 } a \text{ 和 } b \text{ 為實數。}$$

已知(E)有無窮多個解。

(a) 求 a 和 b 的值。

(b) 解(E)。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10.

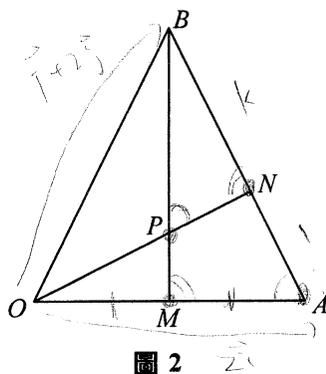


圖 2

設 $\vec{OA} = 2\mathbf{i}$ 和 $\vec{OB} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 。M 為 OA 的中點，而 N 則在 AB 上使得 $BN:NA = k:1$ 。BM 與 ON 相交於 P (見圖 2)。

- (a) 以 k 表 \vec{ON} 。
- (b) 若 A、N、P 與 M 共圓，求 k 的值。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dotted lines for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin at the top and bottom.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50分)

11. (a) 設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 。通過求 $\frac{d}{d\theta} \ln(\sec \theta + \tan \theta)$ ，或用其他方法，證明 $\int \sec \theta \, d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + C$ ，其中 C 為任意常數。

(2分)

(b) (i) 利用(a)和適當的代換，證明 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) + C$ ，其中 $u > 1$ 。

(ii) 利用(b)(i)，證明 $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3}} \, dx = \ln(6 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$ 。

(5分)

(c) 設 $t = \tan \phi$ 。證明 $\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ 。

由此計算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan \phi}{\sqrt{1+2\cos^2 \phi}} \, d\phi$ 。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12.

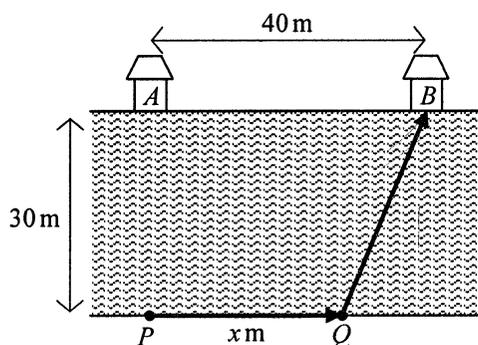


圖 3

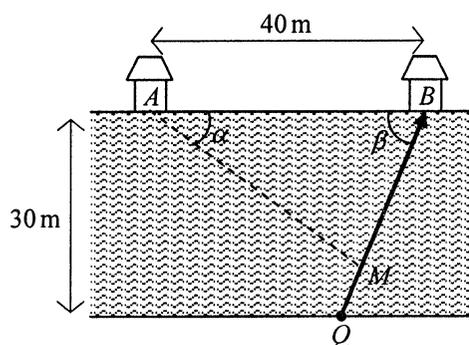


圖 4

在圖 3 中，座落在筆直河岸邊的兩間房子 A 和 B 相距 40 m 。河的寬度恆為 30 m 。起初，智朗站在河對岸與 A 相距 30 m 的起點處 P 。位於 A 的智朗的妻子看着他以恆速率 7 ms^{-1} 沿河岸跑了 $x\text{ m}$ 到達 Q 點，然後以恆速率 1.4 ms^{-1} 沿直線游向 B ，最終到達 B 。

(a) 設 T 秒為智朗由 P 到 B 的時間。

(i) 以 x 表 T 。

(ii) 當 T 達到極小值時，證明 x 滿足方程 $2x^2 - 160x + 3125 = 0$ 。

由此證明 $QB = \frac{25\sqrt{6}}{2}\text{ m}$ 。

(6 分)

(b) 在圖 4 中，智朗正由 Q 游向 B ，其中 QB 取(a)(ii)所述的值。設 $\angle MAB = \alpha$ 和 $\angle ABM = \beta$ ，其中 M 為智朗的位置。

(i) 通過求 $\sin \beta$ 和 $\cos \beta$ ，證明 $MB = \frac{200 \tan \alpha}{\tan \alpha + 2\sqrt{6}}$ 。

(ii) 求當 $\alpha = 0.2$ 弧度時 α 的變率，答案須準確至 4 位小數。

(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with a solid black border and horizontal dotted lines inside, intended for writing answers.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. 對於任意矩陣 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，定義 $\text{tr}(M) = a + d$ 。

設 A 和 B 為 2×2 矩陣，使得 $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 。

(a) (i) 對於任意矩陣 $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ，證明 $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$ 。

(ii) 證明 $\text{tr}(A) = 4$ 。

(iii) 求 $|A|$ 的值。

(6 分)

(b) 設 $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 。已知對於某些非零矩陣 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 和相異純量 λ_1 和 λ_2 ， $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 和 $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 。

(i) 證明 $\begin{vmatrix} p - \lambda_1 & q \\ r & s - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0$ 和 $\begin{vmatrix} p - \lambda_2 & q \\ r & s - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$ 。

(ii) 證明 λ_1 和 λ_2 為方程 $\lambda^2 - \text{tr}(C) \cdot \lambda + |C| = 0$ 的根。

(5 分)

(c) 求 λ 的兩值使得對於某些非零矩陣 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ， $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 。

(2 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

試卷完

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。