

評卷參考

單元一（微積分與統計）

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生以及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

一般閱卷原則

1. 評卷時，閱卷員須跟循評卷參考的評分標準給分，這是十分重要的。很多時考生會運用評卷參考以外的方法而得到正確答案，一般來說，只要運用合理的方法而取得正確答案，該考生應可獲得該部分的**所有分數**（除題目特別指明特定方法外）。閱卷員應有耐性地評閱評卷參考以外的解題方法。
2. 在評卷參考中，分數會分為下列三類：

| | |
|-------------|------------------------|
| 「M」分 | 使用正確方法的得分； |
| 「A」分 | 正確答案的得分； |
| 沒有「M」或「A」的分 | 正確地完成證題或推演得題目所給的答案的得分。 |

某些題目由數部分組成，而較後部分的答案卻需依賴較前部分所得的結果。在這情況下，若考生因為前部分錯誤的結果而導致後部分的答案錯誤，但卻能運用正確的方法去解題，則方法正確的步驟可給「M」分，而相應的答案將沒有「A」分（除特別指明外）。
3. 為方便閱卷員評卷，評卷參考已盡量詳盡。當然，考生的答案多不會如評卷參考般清楚列寫出來，諸如欠缺某幾個步驟或將步驟隱含於字裏行間。如遇到類似情況，閱卷員應運用他們的專業知識去判斷是否給分。一般來說，如考生的答案顯示他已運用相關的概念或技巧，則該部分應予給分。
4. 評卷時遇有不清楚的地方，應以考生的利益為依歸。
5. 評卷參考中，**塗上陰影的部分**代表可省略的步驟，**有外框的部分**代表運用不同方法的答案。所有分數答案必須化簡。
6. 除在題目中特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。未達所需準確度的答案均不被接受。

| 解 | 分 | 備註 |
|---|--------------|---------------------------|
| 1. (a) $0.08 + 0.15 + a + 0.45 + b = 1$ $2(0.08) + 3(0.15) + 5a + 7(0.45) + 9b = 5.64$ 求解後，可得 $a = 0.25$ 及 $b = 0.07$ 。 | 1M 1A | 任何一項----- ----- 給兩項 |
| (b) $E((6 - 5X)^2)$ $= E(36 - 60X + 25X^2)$ $= 36 - 60E(X) + 25E(X^2)$ $= 36 - 60(5.64) + 25(35.64)$ $= 588.6$ | 1M 1A | |
| $Var(6 - 5X)$ $= E((6 - 5X)^2) - (E(6 - 5X))^2$ $= E((6 - 5X)^2) - (6 - 5E(X))^2$ $= 588.6 - (6 - 5(5.64))^2$ $= 95.76$ | 1M 1A | 接受 $(-5)^2 Var(X)$ |
| | -----(6) | |
| 2. (a) $P(A' \cap B')$ $= P(B' A')P(A')$ $= 0.6(1 - 0.3)$ $= 0.42$ | 1M 1A | |
| $P(A' \cap B)$ $= P(A') - P(A' \cap B')$ $= 1 - 0.3 - 0.42$ $= 0.28$ | 1M 1A | |
| (b) 留意 $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$ 。 由於 $P(B) = P(A' \cap B) = 0.28$ ，可得 $P(A \cap B) = 0$ 。 因此， A 與 B 互斥。 | 1M 1A | 必須顯示理由 |
| | -----(6) | |

| 解 | 分 | 備註 |
|--|-------------------------------|------------------------------------|
| 3. (a) 所求的概率 $= \frac{2}{7}p + \frac{5}{7}(1-p)$ $= \frac{5-3p}{7}$ | 1M 1A | 給 $rs + (1-r)(1-s)$ |
| (b) (i) $\frac{5-3p}{7} = \frac{50}{91}$ $p = \frac{5}{13}$ $p \approx 0.384615384$ $p \approx 0.3846$ | 1M 1A | 給利用 (a) 接受答案準確至 0.3846 |
| (ii) 所求的概率 $= \frac{\frac{2}{7}\left(1 - \frac{5}{13}\right)}{1 - \frac{50}{91}}$ $= \frac{16}{41}$ ≈ 0.3902439024 ≈ 0.3902 | 1M 1A ----- (6) | 給分子利用 (b)(i) 接受答案準確至 0.3902 |

| 解 | 分 | 備註 |
|--|-----------------------------|---|
| 4. (a) 所求的概率 $= (0.75)^3(1-0.75)$ $= \frac{27}{256}$ $= 0.10546875$ ≈ 0.1055 (b) 所求的概率 $= 1 - \left((0.75)^4 + 4 \left(\frac{27}{256} \right) \right)$ $= \frac{67}{256}$ $= 0.26171875$ ≈ 0.2617 | 1M 1A 1M+1M 1A | 給 $p^3(1-p)$, $0 < p < 1$ 接受答案準確至 0.1055 1M 給 $1-p$ + 1M 給利用 (a) 接受答案準確至 0.2617 |
| 所求的概率 $= (1-0.75)^4 + C_1^4(1-0.75)^3(0.75) + C_2^4(1-0.75)^2(0.75)^2$ $= \frac{67}{256}$ $= 0.26171875$ ≈ 0.2617 | 1M+1M 1A | 1M 給三個情況 + 1M 給二項概率 接受答案準確至 0.2617 |
| (c) 所求的概率 $= \frac{(1-(0.75)^3)(1-0.75)}{0.26171875}$ $= \frac{37}{67}$ ≈ 0.552238806 ≈ 0.5522 | 1M 1A | 給分母利用 (b) 接受答案準確至 0.5522 |
| 所求的概率 $= \frac{\left((1-0.75)^3 + C_1^3(1-0.75)^2(0.75) + C_2^3(1-0.75)(0.75)^2 \right)(1-0.75)}{0.26171875}$ $= \frac{37}{67}$ ≈ 0.552238806 ≈ 0.5522 | 1M 1A | 給分母利用 (b) 接受答案準確至 0.5522 |
| | -----(7) | |

| 解 | 分 | 備註 |
|---|---|----|
| <p>5. (a) e^{-4x} $= 1 + (-4x) + \frac{(-4x)^2}{2!} + \dots$ $= 1 - 4x + 8x^2 - \dots$</p> <p>(b) $(2+x)^5$ $= 2^5 + C_1^5(2^4)x + C_2^5(2^3)x^2 + \dots + x^5$ $= 32 + 80x + 80x^2 + \dots + x^5$</p> <p>所求的係數 $= (1)(80) + (-4)(80) + (8)(32)$ $= 16$</p> | <p>1M 1A</p> <p>1M</p> <p>1M 1A</p> <p>----- (5)</p> | |
| <p>6. (a) $e^{2x} + e^4 = e^{x+3} + e^{x+1}$ $(e^x)^2 - (e^3 + e)e^x + e^4 = 0$ $(e^x - e)(e^x - e^3) = 0$ $e^x = e$ 或 $e^x = e^3$ $x = 1$ 或 $x = 3$ 因此，x 坐標為 1 及 3。</p> <p>(b) C_1 與 C_2 圍成的區域的面積 $= \int_1^3 (e^{x+3} + e^{x+1} - (e^{2x} + e^4)) dx$ $= \left[e^{x+3} + e^{x+1} - \frac{e^{2x}}{2} - e^4 x \right]_1^3$ $= \frac{e^6}{2} - 2e^4 - \frac{e^2}{2}$</p> | <p>1M</p> <p>1A</p> <p>1M+1A</p> <p>1M</p> <p>1A</p> <p>----- (6)</p> | |

| 解 | 分 | 備註 |
|--|---------------------------|---|
| 7. (a) $y = x\sqrt{2x^2+1}$ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2x^2+1} + x\left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(4x)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$ | 1M 1A | 給鏈法則 |
| (b) 留意該直線的斜率為 $\frac{-3}{17}$ 。 故此，每一切線的斜率為 $\frac{17}{3}$ 。 $\frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{17}{3}$ $3(4x^2+1) = 17\sqrt{2x^2+1}$ $9(4x^2+1)^2 = 289(2x^2+1)$ $72x^4 - 253x^2 - 140 = 0$ $x = 2$ 或 $x = -2$ | 1M+1A 1M | 1M 給利用 (a) 給 $ax^4 + bx^2 + c = 0$ |
| 對 $x = 2$ ，可得 $y = 6$ 。 C 在點 (2, 6) 的切線的方程為 $y - 6 = \frac{17}{3}(x - 2)$ $17x - 3y - 16 = 0$ 對 $x = -2$ ，可得 $y = -6$ 。 C 在點 (-2, -6) 的切線的方程為 $y + 6 = \frac{17}{3}(x + 2)$ $17x - 3y + 16 = 0$ | 1M 1A | 任何一項 給兩項 |
| ----- (7) | | |
| 8. (a) $\frac{d}{dx}((x^6+1)\ln(x^2+1))$ $= (x^6+1)\frac{2x}{x^2+1} + 6x^5\ln(x^2+1)$ $= (x^2+1)(x^4-x^2+1)\frac{2x}{x^2+1} + 6x^5\ln(x^2+1)$ $= 2x^5 - 2x^3 + 2x + 6x^5\ln(x^2+1)$ | 1M+1A 1M 1A | 1M 給積法則 |
| (b) $(x^6+1)\ln(x^2+1) = 2\int(x^5-x^3+x)dx + 6\int x^5\ln(x^2+1)dx$ 留意 $\int(x^5-x^3+x)dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \text{常數}$ 。 因此，可得 $\int x^5\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{6}(x^6+1)\ln(x^2+1) - \frac{x^6}{18} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{6} + \text{常數}$ 。 | 1M 1A 1A | |
| ----- (7) | | |

| 解 | 分 | 備註 |
|---|---------------------------------|--|
| 9. (a) (i) 樣本平均值 $= 68.64 \text{ km/h}$ μ 的 95% 置信區間 $= \left(68.64 - 1.96 \left(\frac{16}{\sqrt{25}} \right), 68.64 + 1.96 \left(\frac{16}{\sqrt{25}} \right) \right)$ $= (62.368, 74.912)$ | 1A 1M+1A 1A | 1A 給 1.96 |
| (ii) 設 n 為樣本容量。 $2(2.24) \left(\frac{16}{\sqrt{n}} \right) < 9$ $n > 63.43237531$ 因此，最小樣本容量為 64。 | 1M+1A 1A -----(7) | 1A 給 2.24 |
| (b) (i) 所求的概率 $= P \left(Z > \frac{90-66}{16} \right)$ $= P(Z > 1.5)$ $= 0.5 - 0.4332$ $= 0.0668$ | 1M 1A | |
| (ii) 所求的概率 $= 1 - (1-0.0668)^{12} - C_1^{12}(1-0.0668)^{11}(0.0668) - C_2^{12}(1-0.0668)^{10}(0.0668)^2$ ≈ 0.041574551 ≈ 0.0416 | 1M+1M 1A -----(5) | 1M 給利用 (b)(i) + 1M 給二項概率 接受答案準確至 0.0416 |

| 解 | 分 | 備註 |
|--|--|--|
| <p>10. (a) 所求的概率</p> $= \frac{3.2^0 e^{-3.2}}{0!} + \frac{3.2^1 e^{-3.2}}{1!} + \frac{3.2^2 e^{-3.2}}{2!} + \frac{3.2^3 e^{-3.2}}{3!}$ ≈ 0.602519724 ≈ 0.6025 | <p>1M+1M</p> <p>1A</p> <p>-----(3)</p> | <p>1M 給四個情況 + 1M 給泊松概率</p> <p>接受答案準確至 0.6025</p> |
| <p>(b) 所求的概率</p> $= C_2^7 (0.7)^2 (1-0.7)^5 (0.7)$ ≈ 0.01750329 ≈ 0.0175 | <p>1M</p> <p>1A</p> <p>-----(2)</p> | <p>給二項概率</p> <p>接受答案準確至 0.0175</p> |
| <p>(c) 所求的概率</p> $= \frac{3.2^3 e^{-3.2}}{3!} (0.7)^3$ ≈ 0.076357282 ≈ 0.0764 | <p>1M</p> <p>1A</p> <p>-----(2)</p> | <p>接受答案準確至 0.0764</p> |
| <p>(d) 所求的概率</p> $\approx 0.076357282 + \frac{3.2^3 e^{-3.2}}{3!} (3(0.12)^2 (0.04) + 3!(0.12)(0.7)(0.08))$ ≈ 0.085717839 ≈ 0.0857 | <p>1M+1A</p> <p>1A</p> <p>-----(3)</p> | <p>1M 給利用 (c) + 1A 給任何一項正確</p> <p>接受答案準確至 0.0857</p> |
| <p>(e) 所求的概率</p> $\approx \frac{\left(\frac{3.2 e^{-3.2}}{1!} (0.02) + \left(\frac{3.2^2 e^{-3.2}}{2!} \right) (2(0.12)(0.03) + 2(0.7)(0.04) + (0.08)^2) \right)}{0.602519724} + 0.085717839$ ≈ 0.170703644 ≈ 0.1707 | <p>1M+1M</p> <p>1A</p> <p>-----(3)</p> | <p>1M 給分子利用 (d) + 1M 給分母利用 (a)</p> <p>接受答案準確至 0.1707</p> |

| 解 | 分 | 備註 |
|--|--|-----------------------|
| 11. (a) 油公司 X 的總產油量 $= \int_2^{12} f(t) dt$ $\approx \frac{1}{2} \left(\frac{12-2}{5} \right) (f(2) + f(12) + 2(f(4) + f(6) + f(8) + f(10)))$ ≈ 69.49587529 $\approx 69.4959 \text{ 百桶}$ | 1M 1M 1A -----(3) | 接受答案準確至 69.4959 |
| (b) $\frac{df(t)}{dt}$ $= \frac{e^t - 1}{e^t - t}$ $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ $= \frac{(e^t - t)e^t - (e^t - 1)(e^t - 1)}{(e^t - t)^2}$ $= \frac{e^t(2-t) - 1}{(e^t - t)^2}$ $< 0 \text{ (由於 } 2 \leq t \leq 12)$ 因此，(a) 的估計值過低。 | 1A 1A 1A 1A -----(3) | 必須顯示理由 |
| (c) 設 $u = 1+t$ ，則可得 $\frac{du}{dt} = 1$ 。 $\int \frac{t}{1+t} dt$ $= \int \frac{u-1}{u} du$ $= \int \left(1 - \frac{1}{u} \right) du$ $= u - \ln u + \text{常數}$ $= t - \ln(1+t) + \text{常數}$ | 1M 1A 1A | |
| 留意 $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ 。 $\int \frac{t}{1+t} dt$ $= \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt$ $= t - \ln(1+t) + \text{常數}$ | 1A 1M 1A | |
| (d) 油公司 Y 的總產油量 $= 8 \int_2^{12} \frac{t}{1+t} dt$ $= 8 [t - \ln(1+t)]_2^{12} \quad (\text{藉 (c)})$ ≈ 68.26930345 < 69.49587529 藉 (b)，不同意該宣稱。 | -----(3) 1M 1A 1A -----(3) | 給利用 (c) 的結果 必須顯示理由 |

| 解 | 分 | 備註 | | | | | | | | |
|--|----------------------|------------------------|-----------------|-----------------|--|---|---|---|-------|--|
| 12. (a) $S = \frac{200}{1 + a2^{bt}}$ $\frac{200}{S} - 1 = a2^{bt}$ $\ln\left(\frac{200}{S} - 1\right) = (b \ln 2)t + \ln a$ | 1M 1A -----(2) | | | | | | | | | |
| (b) (i) $\ln a = \ln 4$ $a = 4$ $b \ln 2 = \frac{0 - \ln 4}{4 - 0}$ $b = -0.5$ | 1A 1A | | | | | | | | | |
| (ii) $\frac{dS}{dt}$ $= \frac{-200(4)2^{-0.5t}(-0.5) \ln 2}{(1 + 4(2^{-0.5t}))^2}$ $= \frac{(400 \ln 2)2^{-0.5t}}{(1 + 4(2^{-0.5t}))^2}$ | 1M 1A | 給 $\frac{d}{dt}2^{bt}$ | | | | | | | | |
| $\frac{d^2S}{dt^2}$ $= \frac{-200(\ln 2)^2(1 + 4(2^{-0.5t}))^2 2^{-0.5t} + 1600(\ln 2)^2(1 + 4(2^{-0.5t}))2^{-t}}{(1 + 4(2^{-0.5t}))^4}$ $= \frac{-200(\ln 2)^2 2^{-0.5t}(1 - 4(2^{-0.5t}))}{(1 + 4(2^{-0.5t}))^3}$ | 1M 1A | 給商法則 | | | | | | | | |
| (iii) 留意對 $0 \leq t \leq 48$, $\frac{dS}{dt} > 0$ 。 所以對 $0 \leq t \leq 48$, S 增加。 | 1M 1A | 必須顯示理由 | | | | | | | | |
| 對 $\frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = 0$, 可得 $4(2^{-0.5t}) = 1$ 。 由此, 當 $t = 4$ 時, 可得 $\frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = 0$ 。 | | | | | | | | | | |
| <table border="1" data-bbox="216 1653 708 1800"> <thead> <tr> <th>t</th> <th>$0 \leq t < 4$</th> <th>$t = 4$</th> <th>$4 < t \leq 48$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table> | t | $0 \leq t < 4$ | $t = 4$ | $4 < t \leq 48$ | $\frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right)$ | + | 0 | - | 1M+1A | |
| t | $0 \leq t < 4$ | $t = 4$ | $4 < t \leq 48$ | | | | | | | |
| $\frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right)$ | + | 0 | - | | | | | | | |
| 因此, 對 $0 \leq t \leq 4$, $\frac{dS}{dt}$ 遞增及 | | | | | | | | | | |
| 對 $4 \leq t \leq 48$, $\frac{dS}{dt}$ 遞減。 | 1A | 必須顯示理由 | | | | | | | | |
| | -----(11) | | | | | | | | | |