

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）
試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
(上午八時三十分至上午十一時)

考生須知

1. 宣布開考後，考生須首先在第1頁之適當位置填寫考生編號，並在第1、3、5、7、9及11頁之適當位置貼上電腦條碼。
2. 本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。
3. 本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
4. 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。
5. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
6. 除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
7. 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

甲部 (50分)

1. 從基本原理求 $\frac{d}{dx}(x^5 + 4)$ 。 (4分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

2. 設 $y = x \sin x + \cos x$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 設 k 為一常數使得對所有 x 的實數值， $x \frac{d^2y}{dx^2} + k \frac{dy}{dx} + xy = 0$ 。求 k 的值。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal ruling lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and cover most of the page's width and height.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

10. OAB 為三角形。 P 為 OA 的中點。 Q 為 AB 上的一點使得 $AQ:QB=1:2$ ，而 R 為 OB 上的一點使得 $OR:RB=3:1$ 。 PR 與 OQ 相交於 C 。

(a) (i) 設 t 為一常數使得 $PC:CR=t:(1-t)$ 。
藉以 \vec{OA} 及 \vec{OB} 表 \vec{OQ} ，求 t 的值。

(ii) 求 $CQ:OQ$ 。

(7分)

(b) 假定 $\vec{OA}=20\mathbf{i}-6\mathbf{j}-12\mathbf{k}$ 、 $\vec{OB}=16\mathbf{i}-16\mathbf{j}$ 及 $\vec{OD}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ ，其中 O 為原點。求

(i) ΔOAB 的面積，

(ii) 四面體 $ABCD$ 的體積。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal ruling lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and cover most of the page's width and height.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 設 λ 及 μ 均為實數使得 $\mu - \lambda \neq 2$ 。將 2×2 單位矩陣記為 I 。

定義 $A = \frac{1}{\lambda - \mu + 2}(I - \mu I + M)$ 及 $B = \frac{1}{\lambda - \mu + 2}(I + \lambda I - M)$ ，其中

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda - \mu + 1 & \mu \end{pmatrix}。$$

(i) 計算 AB 、 BA 及 $A+B$ 。

(ii) 證明 $A^2 = A$ 及 $B^2 = B$ 。

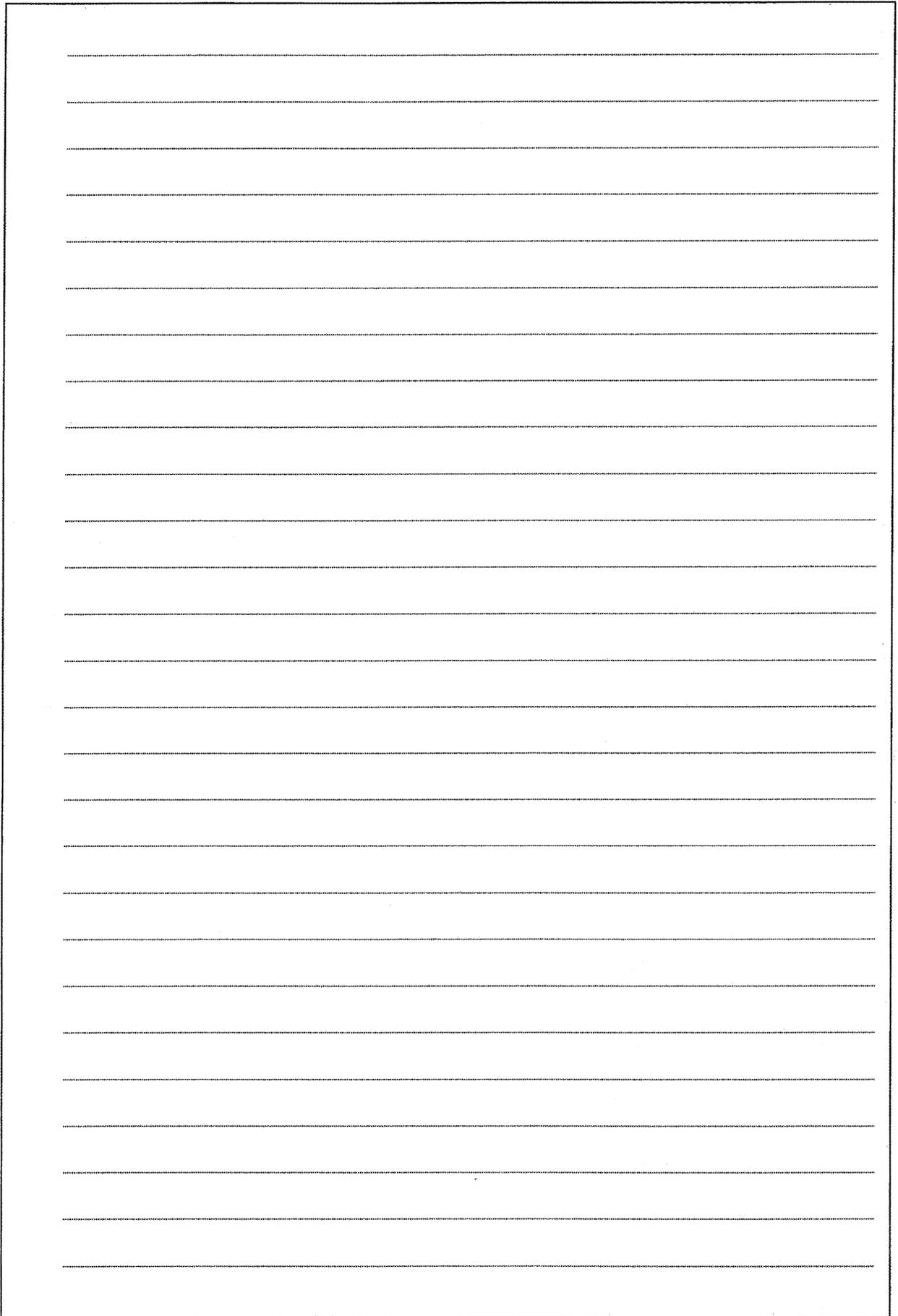
(iii) 證明對所有正整數 n ， $M^n = (\lambda + 1)^n A + (\mu - 1)^n B$ 。

(8分)

(b) 利用 (a)，或其他方法，計算 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^{315}$ 。

(4分)

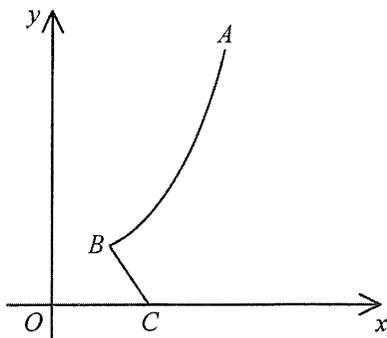
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. (a) 圖中，曲線 Γ 包含曲線 AB 、線段 BC 及線段 CO ，其中 O 為原點， B 在第一象限內且 C 在 x 軸上。 AB 及 BC 的方程分別為 $x^2 - 4y + 8 = 0$ 及 $3x + y - 9 = 0$ 。



- (i) 求 B 的坐標。
- (ii) 設 h 為 A 的 y 坐標，其中 $h > 3$ 。將 Γ 繞 y 軸旋轉成一杯。證明該杯的容量為 $\pi(2h^2 - 8h + 25)$ 。
- (7 分)
- (b) 將 (a)(ii) 所描述的一杯放在某水平桌面上。該杯底及杯口的半徑分別為 3 cm 及 6 cm 。
- (i) 求該杯的容量。
- (ii) 將水以恆速率 $24\pi\text{ cm}^3/\text{s}$ 注入該杯內。求當在該杯內的水的體積為 $35\pi\text{ cm}^3$ 時水深的變率。
- (6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

- 試卷完 -

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。