評卷參考

單元一（微積分與統計）

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生以及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

一般閱卷原則

1. 評卷時，閱卷員須跟循評卷參考的評分標準給分，這是十分重要的。很多時考生會運用評卷參考以外的方法而得到正確答案，一般來說，只要運用合理的方法而取得正確答案，該考生應可獲得該部分的**所有分數**（除題目特別指明特定方法外）。閱卷員應有耐性地評閱評卷參考以外的解題方法。

2. 在評卷參考中，分數會分為下列三類：

「M」分	使用正確方法的得分；
「A」分	正確答案的得分；
沒有「M」或「A」的分	正確地完成證題或推演得題目所給的答案的得分。

某些題目由數部分組成，而較後部分的答案卻需依賴較前部分所得的結果。在這情況下，若考生因為前部分錯誤的結果而導致後部分的答案錯誤，但卻能運用正確的方法去解題，則方法正確的步驟可給「M」分，而相應的答案將沒有「A」分（除特別指明外）。

3. 為方便閱卷員評卷，評卷參考已盡量詳盡。當然，考生的答案多不會如評卷參考般清楚列寫出來，諸如欠缺某幾個步驟或將步驟隱含於字裏行間。如遇到類似情況，閱卷員應運用他們的專業知識去判斷是否給分。一般來說，如考生的答案顯示他已運用相關的概念或技巧，則該部分應予給分。

4. 評卷時遇有不清楚的地方，應以考生的利益為依歸。

5. 評卷參考中，塗上陰影的部分代表可省略的步驟，有外框的部分代表運用不同方法的答案。所有分數答案必須化簡。

6. 除在題目中特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。未達所需準確度的答案均不被接受。

解	分	備註
1. (a) $P(Y\mid X)$ $=0.5$ $\neq 0.7$ $=P(Y)$	1M	
因此，X 與 Y 不是獨立。	1A	必須顯示理由
$P(X)P(Y)$ $=(0.4)(0.7)$ $=0.28$ $P(X\cap Y)$ $=P(Y\mid X)P(X)$ $=(0.5)(0.4)$ $=0.2$ $P(X\cap Y)\neq P(X)P(Y)$	1M	
因此，X 與 Y 不是獨立。	1A	必須顯示理由
(b) $P(X\cap Y)$ $=P(Y\mid X)P(X)$ $=(0.5)(0.4)$	1M	
$=0.2$ $P(X\cup Y)$ $=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$ $=0.4+0.7-0.2$	1M	
$=0.9$	1A ----------(5)	
2. (a) 所求的概率 $=\dfrac{\left(\frac{1}{6}\right)^3(3)}{\left(\frac{1}{6}\right)^3(3+3!+3+3)}$	1M+1M+1M	1M 給 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ + 1M 給分子 + 1M 給分母
$=\dfrac{1}{5}$	1A	
(b) 所求的概率 $=\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^3(3)}{\left(\frac{1}{5}\right)^3(3+3!+3+3)}$	1M	
$=\dfrac{1}{5}$ 因此，所求的概率不會改變。	1A ----------(6)	必須顯示理由

解	分	備註
3. (a) 每分鐘進入該博物館的訪客人數的方差為 1.8 。	1A	
(b) 所求的概率		
$=\dfrac{e^{-3.6}3.6^3}{3!}$	1M+1M	1M給泊松概率 + 1M 給利用平均值 3.6
$=\dfrac{7.776}{e^{3.6}}$	1A	接受答案準確至 0.2125
≈ 0.212469265		
≈ 0.2125		
所求的概率		
$=2\left(\dfrac{e^{-1.8}1.8^0}{0!}\right)\left(\dfrac{e^{-1.8}1.8^3}{3!}\right)+2\left(\dfrac{e^{-1.8}1.8^1}{1!}\right)\left(\dfrac{e^{-1.8}1.8^2}{2!}\right)$	1M + 1M	1M 給 4 個情況 + 1M 給泊松概率利用平均值 1.8
$=\dfrac{7.776}{e^{3.6}}$	1A	接受答案準確至 0.2125
≈ 0.212469265		
≈ 0.2125		
(c) P(一分鐘有至多 3 名訪客)		
$=\dfrac{e^{-1.8}1.8^0}{0!}+\dfrac{e^{-1.8}1.8^1}{1!}+\dfrac{e^{-1.8}1.8^2}{2!}+\dfrac{e^{-1.8}1.8^3}{3!}$	1M	
≈ 0.891291605		
≈ 0.8913		
所求的概率		
$\approx (0.891291605)(1-0.891291605)^2$	1M	
≈ 0.010532851		
≈ 0.0105	1A ----------(7)	接受答案準確至 0.0105
4. (a) p 的點估計為 $\dfrac{64}{100}=0.64$ 。	1A	
p 的近似 95% 置信區間		
$=\left(\dfrac{64}{100}-1.96\sqrt{\dfrac{(0.64)(0.36)}{100}},\dfrac{64}{100}+1.96\sqrt{\dfrac{(0.64)(0.36)}{100}}\right)$	1M+1A	1A 給 1.96
$=(0.54592, 0.73408)$	1A	
$\approx (0.5459, 0.7341)$		
(b) 設 n 為該樣本內的包的數量。		
p 的 90% 置信區間的寬度為 $(2)(1.645)\left(\dfrac{0.05}{\sqrt{n}}\right)$ 。		
$(2)(1.645)\left(\dfrac{0.05}{\sqrt{n}}\right)<0.04$	1M+1A	
$\sqrt{n}>4.1125$		
$n>16.91265625$		
因此，最小樣本容量為 17 。	1A ----------(7)	

解	分	備註
5. (a) e^{kx}		
$=1+kx+\dfrac{(kx)^2}{2!}+\cdots$		
$=1+kx+\dfrac{k^2x^2}{2}+\cdots$	1A	
(b) $(1+2x)^7e^{kx}$		
$=\left(1+C_1^7(2x)+C_2^7(2x)^2+\cdots+(2x)^7\right)\left(1+kx+\dfrac{k^2x^2}{2}+\cdots\right)$	1M	
$=\left(1+14x+84x^2+\cdots+(2x)^7\right)\left(1+kx+\dfrac{k^2x^2}{2}+\cdots\right)$		
$\therefore\ 14+k=8$	1M	
$k=-6$		
x^2 的係數		
$=(1)\left(\dfrac{(-6)^2}{2}\right)+14(-6)+(84)(1)$	1M	
$=18$	1A	
	----------(5)	
6. (a) $\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$		
$=\int(3^{2x}-10(3^x)+9)\,\mathrm{d}x$		
$=\dfrac{3^{2x}}{2\ln 3}-\dfrac{10(3^x)}{\ln 3}+9x+$常數	1M+1A	1M 給 $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+$常數
(b) (i) $3^{2x}-10(3^x)+9=0$		
$(3^x)^2-10(3^x)+9=0$	1M	
$3^x=1$ 或 $3^x=9$		
$x=0$ 或 $x=2$	1A	給兩項
因此， x 截距為 0 及 2 。		
(ii) C 與 x 軸圍成的區域的面積		
$=-\int_0^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$	1M	
$=-\left[\dfrac{3^{2x}}{2\ln 3}-\dfrac{10(3^x)}{\ln 3}+9x\right]_0^2$ （藉 (a)）		
$=-\left(\dfrac{81}{2\ln 3}-\dfrac{90}{\ln 3}+18\right)+\left(\dfrac{1}{2\ln 3}-\dfrac{10}{\ln 3}\right)$		
$=\dfrac{40}{\ln 3}-18$	1A	
	----------(6)	

解	分	備註
7. (a) $\dfrac{dy}{dx}$		
$=\left(\dfrac{3}{2}\right)(2x+8)^{\frac{1}{2}}(2)+6x$	1M	給鏈式法則
$=3\sqrt{2x+8}+6x$	1A	
(b) 留意直線 $6x+y+4=0$ 的斜率為 -6 。 故此，該切線的斜率為 -6 。		
$3\sqrt{2x+8}+6x=-6$	1M+1A	1M 給利用 (a)
$\sqrt{2x+8}=-2(x+1)$		
$2x+8=4(x+1)^2$		
$2x^2+3x-2=0$	1M	給 $ax^2+bx+c=0$
$x=-2$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$ （捨去）	1A	給「$x=-2$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$」
由此，C 只有一條切線平行於直線 $6x+y+4=0$ 。 因此，不同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
	----------(7)	
8. (a) $f'(x)$		
$=\dfrac{x\left(2(\ln x)\dfrac{1}{x}\right)-(\ln x)^2}{x^2}$	1M	給商法則
$=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$		
$=\dfrac{(2-\ln x)(\ln x)}{x^2}$		
$f'(x)=0$		
$\ln x=2$ 或 $\ln x=0$		
$x=e^2$ 或 $x=1$		
$\alpha=e^2$ 及 $\beta=1$	1A+1A	
(b) 設 $u=\ln x$ ，	1M	
則可得 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$ 。		
$\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$		
$=\displaystyle\int_{1}^{e^2}\dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$		
$=\displaystyle\int_{0}^{2}u^2\,du$	1A	
$=\left[\dfrac{u^3}{3}\right]_0^2$	1M	
$=\dfrac{8}{3}$	1A	接受答案準確至 2.6667
≈ 2.666666667		
≈ 2.6667		
	----------(7)	

解	分	備註
9. 設 J 分鐘及 K 分鐘分別為代表學校 X 及學校 Y 學生每天閱讀時間的隨機變量。		
(a) 設 μ_1 分鐘及 σ_1 分鐘分別為學校 X 學生每天閱讀時間的平均值及標準差，而 μ_2 分鐘及 σ_2 分鐘分別為學校 Y 學生每天閱讀時間的平均值及標準差。		
$\begin{cases} \dfrac{40-\mu_1}{\sigma_1}=-2.51 \\ \dfrac{70-\mu_1}{\sigma_1}=2.17 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{48-\mu_2}{\sigma_2}=-2.17 \\ \dfrac{72-\mu_2}{\sigma_2}=2.12 \end{cases}$	1M+1A	任何一項
求解後，可得 $\mu_1=\dfrac{4375}{78}, \sigma_1=\dfrac{250}{39}$ $\mu_1 \approx 56.08974359, \sigma_1 \approx 6.41025641$ $\mu_1 \approx 56.0897, \sigma_1 \approx 6.4103$	1A	給兩項 接受答案準確至 $\mu_1 \approx 56.0897$, $\sigma_1 \approx 6.4103$
$\mu_2=\dfrac{8600}{143}, \sigma_2=\dfrac{800}{143}$ $\mu_2 \approx 60.13986014, \sigma_2 \approx 5.594405594$ $\mu_2 \approx 60.1399, \sigma_2 \approx 5.5944$	1A	給兩項 接受答案準確至 $\mu_2 \approx 60.1399$, $\sigma_2 \approx 5.5944$
P(學校 X 每天閱讀多於 60 分鐘的學生) $=P(J>60)$ $=P\left(Z>\dfrac{60-\frac{4375}{78}}{\frac{250}{39}}\right)$ $=P(Z>0.61)$ $=0.2709$ P(學校 Y 每天閱讀多於 60 分鐘的學生) $=P(K>60)$ $=P\left(Z>\dfrac{60-\frac{8600}{143}}{\frac{800}{143}}\right)$ $=P(Z>\frac{-1}{40})$ $>P(Z>0)$ $=0.5$ >0.2709	1M	任何一項
因此，學校 X 有較少學生每天閱讀多於 60 分鐘。	1A ----------(6)	必須顯示理由

解	分	備註
(b) 所求的概率		
$=C_1^3(0.2709)(1-0.2709)^2(0.2709)$	1M	
≈ 0.11703438		
≈ 0.1170	1A	接受答案準確至 0.1170
	----------(2)	
(c) 對學校 X，		
$\mathrm{P}(J \geq T) \leq 0.1$		
$\dfrac{T-\frac{4375}{78}}{\frac{250}{39}} \geq 1.29$	1M+1A	1A 給 1.29
$T \geq \frac{2510}{39}$		任何一項
$T \geq 64.35897436$		
$T \geq 65$	1A	接受 $T=65$
對學校 Y，		
$\mathrm{P}(K \geq T) \leq 0.1$		
$\dfrac{T-\frac{8600}{143}}{\frac{800}{143}} \geq 1.29$		
$T \geq \frac{9632}{143}$		任何一項
$T \geq 67.35664336$		
$T \geq 68$		
因此， T 的最小值應為 68 。	1A	必須顯示理由
	----------(4)	

解	分	備註
10. (a) 所求的概率		
$= 0.9 + (1-0.9)(0.9)$	1M	
$= 0.99$	1A	
	----------(2)	
(b) 所求的概率		
$= (0.9)(0.1) + (1-0.9)(0.9)(0.4) + (1-0.9)^2(1)$	1M	
$= 0.136$	1A	
	----------(2)	
(c) 所求的概率		
$= C_2^6(1-0.136)^4(0.136)^2$	1M	
≈ 0.154605181		
≈ 0.1546	1A	接受答案準確至 0.1546
	----------(2)	
(d) (i) 所求的概率		
$= (0.136)(0.7)^6 + (1-0.136)(0.3)^6$	1M	
≈ 0.01663012		
≈ 0.0166	1A	接受答案準確至 0.0166
(ii) 所求的概率		
$= (0.136)C_3^6(0.7)^3(0.3)^3 + (1-0.136)C_2^6(0.7)^4(0.3)^2$	1M+1M	
≈ 0.30524256		
≈ 0.3052	1A	接受答案準確至 0.3052
(iii) 所求的概率		
$= \dfrac{(0.136)C_3^6(0.7)^3(0.3)^3}{(0.136)C_3^6(0.7)^3(0.3)^3 + (1-0.136)C_2^6(0.7)^4(0.3)^2}$	1M	1M 給分母利用 (d)(ii)
≈ 0.082524271		
≈ 0.0825	1A	接受答案準確至 0.0825
	----------(7)	

解	分	備註
11. (a) (i) P_1		
$=\int_0^{12} \mathrm{A}(t)\,\mathrm{d}t$		
$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{12-0}{4}\right)(\mathrm{A}(0)+\mathrm{A}(12)+2(\mathrm{A}(3)+\mathrm{A}(6)+\mathrm{A}(9)))$	1M	
≈ 54.61085671		
≈ 54.6109	1A	接受答案準確至 54.6109
(ii) $\frac{\mathrm{dA}(t)}{\mathrm{d}t}$		
$=\frac{2t-8}{t^2-8t+95}$	1A	
$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{A}(t)}{\mathrm{d}t^2}$		
$=\frac{2(t^2-8t+95)-(2t-8)^2}{(t^2-8t+95)^2}$		
$=\frac{-2t^2+16t+126}{(t^2-8t+95)^2}$	1A	
$=\frac{-2(t^2-8t-63)}{(t^2-8t+95)^2}$		
	----------(4)	
(b) (i) 設 $u=t+3$，	1M	
則可得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=1$ 。		
P_2		
$=\int_0^{12} \mathrm{B}(t)\,\mathrm{d}t$	1M	
$=\int_0^{12} \frac{t+8}{\sqrt{t+3}}\,\mathrm{d}t$		
$=\int_3^{15} \frac{u-3+8}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$	1A	
$=\int_3^{15} (u^{\frac{1}{2}}+5u^{\frac{-1}{2}})\,\mathrm{d}u$		
$=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+10u^{\frac{1}{2}}\right]_3^{15}$	1M	
$=20\sqrt{15}-12\sqrt{3}$	1A	接受答案準確至 56.6751
≈ 56.67505723		
≈ 56.6751		

解	分	備註
(b) (ii) $\dfrac{d^2A(t)}{dt^2}=\dfrac{-2[t-(4-\sqrt{79})][t-(4+\sqrt{79})]}{(t^2-8t+95)^2}$	1M	1M 給考慮 $\dfrac{d^2A(t)}{dt^2}$
留意 $4-\sqrt{79}<0$ 及 $4+\sqrt{79}>12$ 。		
所以，可得對 $0\le t\le 12$ ， $\dfrac{(t-(4-\sqrt{79}))(t-(4+\sqrt{79}))}{(t^2-8t+95)^2}<0$ 。		
由此，可得對 $0\le t\le 12$ ， $\dfrac{d^2A(t)}{dt^2}>0$ 。	1A	必須顯示理由
故此， P_1 的估計值過高。 $P_1<54.61085671$ 。		
P_2-P_1		
$=20\sqrt{15}-12\sqrt{3}-P_1$		
$>20\sqrt{15}-12\sqrt{3}-54.61085671$	1M	
≈ 2.064200523		
>2		
因此，不同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
	----------(9)	

解	分	備註

12. (a) $N=\dfrac{27}{2+\alpha te^{\beta t}}$

$\dfrac{27-2N}{Nt}=\alpha e^{\beta t}$ 1M

$\ln\left(\dfrac{27-2N}{Nt}\right)=\ln\alpha+\beta t$ 1A

----------(2)

(b) (i) $\beta=-0.1$ 1A

$0=-0.1(10\ln 0.03)+\ln\alpha$

$\ln\alpha=\ln 0.03$

$\alpha=0.03$ 1A

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$

$=-27(2+0.03te^{-0.1t})^{-2}(0.03)(e^{-0.1t}-0.1te^{-0.1t})$ 1M 給 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\beta t}=\beta e^{\beta t}$

$=\dfrac{0.081(t-10)e^{-0.1t}}{(2+0.03te^{-0.1t})^2}$ 1A

對 $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0$ ，可得 $t=10$ 。

t	$0\le t<10$	$t=10$	$t>10$
$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$	$-$	0	$+$

1M

故此，當 $t=10$ 時，N 達至最小值。 1A

N 的最小值 $=\dfrac{27}{2+0.3e^{-1}}\approx 12.79400243>12$ 。

因此，在該禽流感開始擴散起計的某一日，該農場內雞的數目不會少於 12 千。 1A 必須顯示理由

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2}$

$=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)$

$=\dfrac{0.081(2+0.03te^{-0.1t})^2(e^{-0.1t}-0.1(t-10)e^{-0.1t})}{(2+0.03te^{-0.1t})^4}$

$-\dfrac{0.081(t-10)e^{-0.1t}(2)(2+0.03te^{-0.1t})(0.03)(e^{-0.1t}-0.1te^{-0.1t})}{(2+0.03te^{-0.1t})^4}$ 1M 給商法則

$=0.0081\left(\dfrac{(2+0.03te^{-0.1t})(20-t)e^{-0.1t}+0.06(t-10)^2e^{-0.2t}}{(2+0.03te^{-0.1t})^3}\right)$ 1A

由此，對 $0\le t\le 20$ ，可得 $\dfrac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2}>0$ 。

故此，對 $0\le t\le 20$ ，$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ 遞增。 1A 必須顯示理由

因此，雞的數目的變率遞增。

----------(10)