評卷參考

單元二（代數與微積分）

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生以及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

一般閱卷原則

1. 評卷時，閱卷員須跟循評卷參考的評分標準給分，這是十分重要的。很多時考生會運用評卷參考以外的方法而得到正確答案，一般來說，只要運用合理的方法而取得正確答案，該考生應可獲得該部分的**所有分數**（除題目特別指明特定方法外）。閱卷員應有耐性地評閱評卷參考以外的解題方法。

2. 在評卷參考中，分數會分為下列三類：

「M」分	使用正確方法的得分；
「A」分	正確答案的得分；
沒有「M」或「A」的分	正確地完成證題或推演得題目所給的答案的得分。

某些題目由數部分組成，而較後部分的答案卻需依賴較前部分所得的結果。在這情況下，若考生因為前部分錯誤的結果而導致後部分的答案錯誤，但卻能運用正確的方法去解題，則方法正確的步驟可給「M」分，而相應的答案將沒有「A」分（除特別指明外）。

3. 為方便閱卷員評卷，評卷參考已盡量詳盡。當然，考生的答案多不會如評卷參考般清楚列寫出來，諸如欠缺某幾個步驟或將步驟隱含於字裏行間。如遇到類似情況，閱卷員應運用他們的專業知識去判斷是否給分。一般來說，如考生的答案顯示他已運用相關的概念或技巧，則該部分應予給分。

4. 評卷時遇有不清楚的地方，應以考生的利益為依歸。

5. 評卷參考中，塗上陰影的部分代表可省略的步驟，有外框的部分代表運用不同方法的答案。所有分數答案必須化簡。

6. 除在題目中特別指明外，不以真確值表示的數值答案均不被接受。

解	分	備註
1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sec 6\theta$		
$=\lim_{h\to 0}\frac{\sec 6(\theta+h)-\sec 6\theta}{h}$	1M	
$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos 6\theta-\cos 6(\theta+h)}{h\cos 6(\theta+h)\cos 6\theta}$		
$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(6\theta+3h)\sin 3h}{h\cos 6(\theta+h)\cos 6\theta}$	1M	
$=6\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3h}{3h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin(6\theta+3h)}{\cos 6(\theta+h)\cos 6\theta}\right)$	1M	
$=6(1)\left(\frac{\sin 6\theta}{\cos^2 6\theta}\right)$	1M	保留不給 1M 若遺漏步驟
$=6\sec 6\theta\tan 6\theta$	1A	
	----------(5)	
2. 留意 $(1+ax)^8=1+C_1^8ax+C_2^8(ax)^2+\cdots+(ax)^8$ 及	1M	
$(b+x)^9=b^9+C_1^9b^8x+C_2^9b^7x^2+\cdots+C_7^9b^2x^7+C_8^9bx^8+x^9$ 。	1M	
再者留意 $\lambda_2:\mu_7=7:4$ 及 $\lambda_1+\mu_8+6=0$ 。		
所以，可得 $\frac{C_2^8a^2}{C_7^9b^2}=\frac{7}{4}$ 及 $8a+9b+6=0$ 。	1M	給任何一項
故此，可得 $4a^2=9b^2$ 及 $8a+9b+6=0$ 。		
由此，可得 $4a^2-9\left(\frac{-8a-6}{9}\right)^2=0$ 。		
化簡後，可得 $7a^2+24a+9=0$ 。	1M	給 $pa^2+qa+r=0$
因此，可得 $a=-3$ 或 $a=\frac{-3}{7}$ 。	1A	給兩項正確
	----------(5)	

解	分	備註
3. (a) $\overrightarrow{OP}$		
$=\frac{2}{2+3}\mathbf{a}+\frac{3}{2+3}\mathbf{b}$		
$=\frac{2}{5}\mathbf{a}+\frac{3}{5}\mathbf{b}$	1A	
(b) (i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$		
$=\vert\mathbf{a}\vert\vert\mathbf{b}\vert\cos\angle AOB$	1M	
$=(45)(20)\left(\frac{1}{4}\right)$		
$=225$	1A	
(ii) $\left\vert\overrightarrow{OP}\right\vert^2$		
$=\left(\frac{2}{5}\mathbf{a}+\frac{3}{5}\mathbf{b}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\mathbf{a}+\frac{3}{5}\mathbf{b}\right)$		
$=\frac{4}{25}\vert\mathbf{a}\vert^2+2\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\frac{9}{25}\vert\mathbf{b}\vert^2$		
$=324+108+144$	1M	給利用 (b)(i)
$=576$		
$\left\vert\overrightarrow{OP}\right\vert$		
$=\sqrt{576}$		
$=24$	1A	
	----------(5)	
4. (a) $\int x^2e^{-x}\mathrm{d}x$		
$=-\int x^2\mathrm{d}e^{-x}$		
$=-x^2e^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}x^2$	1M	給分部積分法
$=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\mathrm{d}x$	1A	
$=-x^2e^{-x}-2\int x\mathrm{d}e^{-x}$		
$=-x^2e^{-x}-2\left(xe^{-x}-\int e^{-x}\mathrm{d}x\right)$		
$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+$常數	1A	
$=-e^{-x}(x^2+2x+2)+$常數		
(b) 所求的面積		
$=\int_0^6 x^2e^{-x}\mathrm{d}x$	1M	
$=\left[-e^{-x}(x^2+2x+2)\right]_0^6$ （藉 (a)）	1M	給利用 (a) 的結果
$=2-\frac{50}{e^6}$	1A	
	----------(6)	

解	分	備註
5. (a) (i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & -11 \\ 2 & 3 & h \end{vmatrix} \neq 0$	1M	
$8h-44-9+16+33-6h \neq 0$		
$2h-4 \neq 0$		
$h \neq 2$	1A	
$h<2$ 或 $h>2$		
(ii) z		
$=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 3 & 8 & 49 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix}}{2h-4}$	1M	
$=\dfrac{k-14}{h-2}$	1A	
(b) 當 $h=2$ 時，(E) 的增廣矩陣為		
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 3 & 8 & -11 & 49 \\ 2 & 3 & 2 & k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & k-14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & k-14 \end{array}\right)$ 。	1M	
由於 (E) 有無限多個解，可得 $h=2$ 及 $k=14$ 。		
因此，(E) 的解集為 $\{(-7t-5, 4t+8, t) : t \in \mathbf{R}\}$ 。	1A	
	----------(6)	

解	分	備註
6. (a) 設 r cm 為該容器內的水面的半徑。		
由於 $\frac{r}{h}=\frac{15}{20}$ ， 可得 $\frac{r}{h}=\frac{3}{4}$ 。	1M	
故此，可得 $r=\frac{3h}{4}$ 。		
A		
$=\pi\left(\frac{3h}{4}\right)\sqrt{h^2+\left(\frac{3h}{4}\right)^2}$	1M	
$=\pi\left(\frac{3h}{4}\right)\sqrt{\frac{25h^2}{16}}$		
$=\frac{15}{16}\pi h^2$	1	
(b) 設 d cm 為當該容器內的水的體積為 96π cm^3 時的水深。		
留意 $\frac{\pi d}{3}\left(\frac{3d}{4}\right)^2=96\pi$ 。	1M	
故此，可得 $d=8$ 。	1A	
藉 (a)，可得 $A=\frac{15}{16}\pi h^2$ 。		
於時間 t s， 可得 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{15}{8}\pi h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ 。	1M	
再者留意 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{\pi}$ 。		
所以，可得 $\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right\|_{h=8}=\frac{15}{8}\pi(8)\left(\frac{3}{\pi}\right)$ 。		
由此，可得 $\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right\|_{h=8}=45$ 。	1A	
因此，所求的變率為 45 cm^2/s 。		
	----------(7)	

解	分	備註
7. (a) $\sin 3x$		
$= \sin(x+2x)$		
$= \sin x\cos 2x + \cos x \sin 2x$	1M	
$= \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x\cos^2 x$		
$= \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\sin x(1-\sin^2 x)$		
$= 3\sin x - 4\sin^3 x$	1	
(b) (i) $\dfrac{\sin 3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$		
$= \dfrac{\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$		
$= \dfrac{\sin 3x\cos\frac{3\pi}{4} - \cos 3x\sin\frac{3\pi}{4}}{\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}}$	1M	
$= \dfrac{\frac{-1}{\sqrt{2}}(\sin 3x + \cos 3x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)}$		
$= \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{\cos x - \sin x}$	1	
(ii) $\dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{\cos x - \sin x} = 2$		
$\dfrac{\sin 3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = 2$ (藉 (b)(i))	1M	給利用 (b)(i)
留意 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ 。		
$3-4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 2$ (藉 (a))	1M	給利用 (a)
$1-4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$		
$\left(1-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(1+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$	1M	
由於 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ， 可得 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ 。		
所以，可得 $x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$ 。		
因此，可得 $x = \frac{5\pi}{12}$ 。	1A	
	----------(8)	

解	分	備註

8. (a) Γ 在 P 的切線的斜率

$= f'(e^3)$

$= \dfrac{1}{e^3}\ln(e^3)^2$ 　1M

$= \dfrac{6}{e^3}$

Γ 在 P 的切線的方程為

$y-7=\dfrac{6}{e^3}(x-e^3)$

$6x-e^3y+e^3=0$ 　1A

(b) $\mathrm{f}(x)$

$= \displaystyle\int \frac{1}{x}\ln x^2\,\mathrm{d}x$

$= 2\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}\ln x$ 　1M

$= (\ln x)^2 + C$

由於 Γ 通過 P，可得 $7=(\ln e^3)^2+C$ 。 　1M

求解後，可得 $C=-2$ 。

因此，Γ 的方程為 $y=(\ln x)^2-2$ 。 　1A

(c) 留意 $\mathrm{f}''(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}$ 。 　1A

所以，可得 $\mathrm{f}''(x)=0 \Leftrightarrow x=e$ 。

x	$(0,e)$	e	(e,∞)
$\mathrm{f}''(x)$	+	0	−

1M

因此，Γ 的拐點為 $(e,-1)$ 。 　1A

----------(8)

解	分	備註
9. (a) 垂直漸近線的方程為 $x+4=0$ 。	1A	
留意 $f(x)=x-9+\dfrac{36}{x+4}$ 。	1M	
因此，斜漸近線的方程為 $y=x-9$ 。	1A	
	----------(3)	
(b) $f'(x)$ $=\dfrac{d}{dx}\left(x-9+\dfrac{36}{x+4}\right)$		
$=1+36(-1)(x+4)^{-2}$	1M	
$=1-\dfrac{36}{(x+4)^2}$	1A	
$f'(x)$ $=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-5x}{x+4}\right)$		
$=\dfrac{(x+4)(2x-5)-(x^2-5x)}{(x+4)^2}$	1M	
$=\dfrac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}$	1A	
	----------(2)	
(c) 留意 $f'(x)=\dfrac{(x+10)(x-2)}{(x+4)^2}$ 。		
故此，可得 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-10$ 或 $x=2$ 。	1A	
(see table below)	1M	
因此，G 的極大點及極小點分別為 $(-10,-25)$ 及 $(2,-1)$ 。	1A+1A	
留意 $f'(x)=\dfrac{(x+10)(x-2)}{(x+4)^2}$ 及 $f''(x)=\dfrac{72}{(x+4)^3}$ 。		
故此，可得 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-10$ 或 $x=2$ 。	1A	
再者留意 $f''(-10)=\dfrac{-1}{3}<0$ 及 $f''(2)=\dfrac{1}{3}>0$ 。	1M	
又再留意 $f(-10)=-25$ 及 $f(2)=-1$ 。		
因此，G 的極大點及極小點分別為 $(-10,-25)$ 及 $(2,-1)$ 。	1A+1A	
	----------(4)	

x	$(-\infty,-10)$	-10	$(-10,-4)$	$(-4,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-25	↘	↘	-1	↗

解	分	備註
(d) 所求的體積		
$=\pi\int_0^5\left(\frac{x^2-5x}{x+4}\right)^2\mathrm{d}x$	1M	
$=\pi\int_0^5\left(x-9+\frac{36}{x+4}\right)^2\mathrm{d}x$		
$=\pi\int_0^5\left(x^2-18x+81+\frac{72(x-9)}{x+4}+\frac{1\,296}{(x+4)^2}\right)\mathrm{d}x$		
$=\pi\int_0^5\left(x^2-18x+153-\frac{936}{x+4}+\frac{1\,296}{(x+4)^2}\right)\mathrm{d}x$	1M	
$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-9x^2+153x-936\ln\lvert x+4\rvert-\frac{1\,296}{x+4}\right]_0^5$	1M	
$=\left(\frac{2\,285}{3}-1\,872\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\pi$	1A	
所求的體積		
$=\pi\int_0^5\left(\frac{x^2-5x}{x+4}\right)^2\mathrm{d}x$	1M	
$=\pi\int_4^9\frac{(x-4)^2(x-9)^2}{x^2}\mathrm{d}x$		
$=\pi\int_4^9\left(\frac{x^4-26x^3+241x^2-936x+1\,296}{x^2}\right)\mathrm{d}x$	1M	
$=\pi\int_4^9\left(x^2-26x+241-\frac{936}{x}+\frac{1\,296}{x^2}\right)\mathrm{d}x$		
$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-13x^2+241x-936\ln\lvert x\rvert-\frac{1\,296}{x}\right]_4^9$	1M	
$=\left(\frac{2\,285}{3}-1\,872\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\pi$	1A	
	----------(4)	

解	分	備註
10. (a) 留意 $\overrightarrow{AB}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{AC}=6\mathbf{i}-6\mathbf{j}$ 。		
$\overrightarrow{AE}$		
$=\dfrac{1}{1+r}\overrightarrow{AC}+\dfrac{r}{1+r}\overrightarrow{AB}$	1M	任何一項
$=\dfrac{2r+6}{r+1}\mathbf{i}+\dfrac{r-6}{r+1}\mathbf{j}+\dfrac{r}{r+1}\mathbf{k}$		
再者留意 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{11}\overrightarrow{AF}+\dfrac{10}{11}\overrightarrow{AD}$ 及 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$ 。		
$\overrightarrow{AF}$		
$=11\overrightarrow{AE}-5\overrightarrow{AC}$		
$=\dfrac{-8r+36}{r+1}\mathbf{i}+\dfrac{41r-36}{r+1}\mathbf{j}+\dfrac{11r}{r+1}\mathbf{k}$	1A	給兩項
由於 A 、 B 與 F 共線，可得 $\dfrac{2}{-8r+36}=\dfrac{1}{41r-36}=\dfrac{1}{11r}$ 。	1M	
求解後，可得 $r=\dfrac{6}{5}$ 。	1A	1.2
	-----------(4)	
(b) (i) 留意 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=3\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ 。		
藉 (a)，可得 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{11}(42\mathbf{i}-24\mathbf{j}+6\mathbf{k})$ 。	1M	給利用 (a)
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}$		
$=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$		
$=(3\mathbf{i}-3\mathbf{j})\cdot\left(\dfrac{1}{11}(9\mathbf{i}+9\mathbf{j}+6\mathbf{k})\right)$		
$=0$	1A	
(ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$	1M	
$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$		
$=(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i}-7\mathbf{j}-\mathbf{k})$		
$=0$		
所以，可得 $\angle ABC=90^\circ=\angle ADE$ 。	1M	
故此，可得 $\angle CBF=90^\circ=\angle CDF$ 。		
因此， B 、 D 、 C 與 F 共圓。	1A	必須顯示理由
	-----------(5)	
(c) 留意 $\overrightarrow{AF}=12\mathbf{i}+6\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{AP}=\mathbf{i}+7\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 。		
由於 $\angle CBF=90^\circ$ ，故此 Q 為 CF 的中點。		
所以，可得 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF})=9\mathbf{i}+3\mathbf{k}$ 。	1M	
四面體 $ABPQ$ 的體積		
$=\dfrac{1}{6}\left\lvert\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP})\right\rvert$	1M	
$=\dfrac{1}{6}\left\lvert\begin{vmatrix}9&0&3\\2&1&1\\1&7&-2\end{vmatrix}\right\rvert$		
$=7$	1A	
	-----------(3)	

解	分	備註
11. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x$	1M	
$\displaystyle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1$	1M	
$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan^{-1}\sqrt{2}-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$		
$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	1A	
	----------(3)	
(b) (i) $\displaystyle\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$		
$\displaystyle=\frac{\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$		
$=2\sin\theta\cos\theta$		
$=\sin 2\theta$	1	
$\displaystyle\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$		
$\displaystyle=\frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$		
$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$		
$=\cos 2\theta$	1	
(ii) 設 $t=\tan\theta$ ，則可得 $\displaystyle\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}$ 。	1M	
留意 $\displaystyle\frac{1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}=\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}=\frac{1+t^2}{t^2+2t+3}$ 。		
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,\mathrm{d}\theta$		
$\displaystyle=\int_0^1 \frac{1+t^2}{t^2+2t+3}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$	1M	
$\displaystyle=\int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t$		
$\displaystyle=\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$		
$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ （藉 (a)）	1M	(a)
	----------(5)	

解	分	備註
(c) 設 $y=\frac{\pi}{4}-\theta$ ，則可得 $\frac{d\theta}{dy}=-1$ 。	1M	
$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$		
$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)+2}\,dy$		
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2y+1}{\cos 2y+\sin 2y+2}\,dy$		
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$	1	
	----------(2)	
(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8\sin 2\theta+9}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$		
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4(\sin 2\theta+1)+4(\sin 2\theta+1)+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$		
$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$		
$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$ (藉 (c))	1M	給利用 (c)
$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$	1M	
$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$		
$=\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ (藉 (b)(ii))	1M	$\pi+$(b)(ii)
設 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$ 及 $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta+1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$ 。		
留意 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$ 。	1M	
藉 (c)，可得 $I=J=\frac{\pi}{8}$ 。	1M	給利用 (c)
$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8\sin 2\theta+9}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$		
$=8I+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+2}\,d\theta$		
$=\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ (藉 (b)(ii))	1M	$\pi+$(b)(ii)
	----------(3)	

解	分	備註
12. (a) A		
$=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$		
$=3^1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+3^0(1)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$		
故此，對 $n=1$ ， 命題為真。	1	
假設 $A^k=3^kI+3^{k-1}k\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ， 其中 k 為一正整數。	1M	
A^{k+1}		
$=A^kA$		
$=\left(3^kI+3^{k-1}k\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$ （藉歸納法假設）	1M	給利用歸納法假設
$=\left(3^kI+3^{k-1}k\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\left(3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$		
$=3^{k+1}I+3^kk\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+3^k\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+3^{k-1}k\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2$		
$=3^{k+1}I+3^k(k+1)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$		
$=3^{k+1}I+3^k(k+1)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$		
所以， 若對 $n=k$ ， 命題為真，則對 $n=k+1$ ， 命題為真。 藉數學歸納法，對所有正整數 n ， 命題為真。	1	
	----------(4)	
(b) (i) 留意 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$ 。	1A	
$P^{-1}BP$		
$=\begin{pmatrix}-1&0\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\2&-1\end{pmatrix}$		
$=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$	1A	
$=A$		
(ii) 藉 (b)(i)，可得 $P^{-1}BP=A$ 。		
故此，可得 $(P^{-1}BP)^n=A^n$ 。		
所以，可得 $P^{-1}B^nP=A^n$ 。	1M	
由此，可得 $B^n=PA^nP^{-1}$ 。		
B^n		
$=\begin{pmatrix}-1&0\\2&-1\end{pmatrix}\left(3^nI+3^{n-1}n\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}-1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$	1M	
$=3^nI+3^{n-1}n\begin{pmatrix}-1&0\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$		
$=3^nI+3^{n-1}n\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}$	1	

解	分	備註
B $=\begin{pmatrix}5&1\\-4&1\end{pmatrix}$ $=3^1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+3^0(1)\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}$ 故此，對 $n=1$ ，命題為真。 假設 $B^k=3^kI+3^{k-1}k\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}$ ，其中 k 為一正整數。 B^{k+1} $=B^kB$		
$=\left(3^kI+3^{k-1}k\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}5&1\\-4&1\end{pmatrix}$ （藉歸納法假設）	1M	給利用歸納法假設
$=\left(3^kI+3^{k-1}k\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}\right)\left(3I+\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}\right)$	1M	
$=3^{k+1}I+3^kk\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}+3^k\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}+3^{k-1}k\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}^2$ $=3^{k+1}I+3^k(k+1)\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $=3^{k+1}I+3^k(k+1)\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}$ 所以，若對 $n=k$ ，命題為真，則對 $n=k+1$ ，命題為真。		
藉數學歸納法，對所有正整數 n ，命題為真。	1	
(iii) $\lvert A^m-B^m\rvert=4m^2$ $\left\lvert 3^{m-1}m\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-3^{m-1}m\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}\right\rvert=4m^2$		
$(3^{m-1})^2m^2\begin{vmatrix}-2&0\\4&2\end{vmatrix}=4m^2$	1M	
$-4m^2(3^{2(m-1)})=4m^2$		
$3^{2(m-1)}=-1$	1M	
留意 $-1<0<3^{2(m-1)}$ 。		
因此，不存在正整數 m 使得 $\lvert A^m-B^m\rvert=4m^2$ 。	1A	必須顯示理由
	----------(8)	