數學延伸部分 單元二（代數與微積分） 評卷參考

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

評卷一般指引

1. 所有閱卷員均應盡量依循本評卷參考評卷。但在很多情況下，考生可能使用評卷參考所述以外的方法求得正確答案。一般而言，除非考題指明須使用某種解題方法，否則考生若使用另外的方法求得正確答案，應獲得該部分的所有分數。如遇考生使用評卷參考以外的方法解題，閱卷員應耐心評閱。

2. 為方便閱卷員，本評卷參考採取盡量詳盡無遺的形式。但考生的解答不一定採取同樣清晰的形式，例如可能略去或沒有言明某些解題步驟。在這些情況下，閱卷員應酌情評分。一般而言，解答如能顯示考生在某一解題步驟運用了相關概念／技巧，則應給予該步驟的分數。

3. 在評分時，任何疑點的利益應歸於考生。

4. 除非考題指明答案須採取的形式，如考生的答案正確，即使該答案的形式較評卷參考提供的形式簡單，仍應予接納。

5. 評卷參考上的分數分為以下三類：

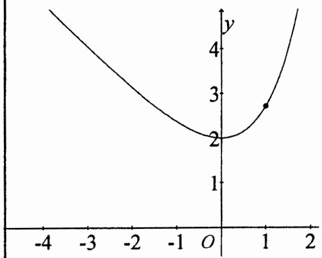
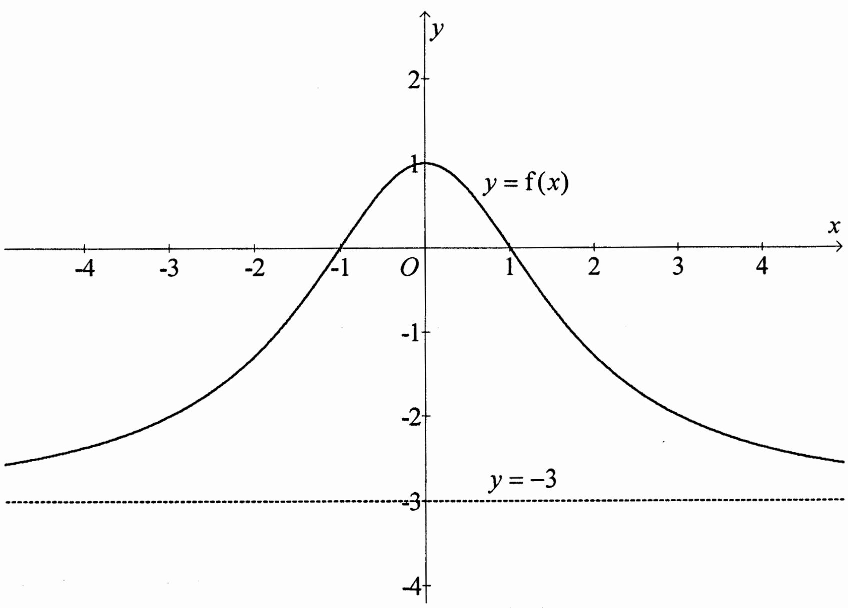
   'M' 分 – 使用正確解題方法而獲得的分數
   'A' 分 – 提供準確答案而獲得的分數
   'M' 或 'A' 以外的分數 – 正確完成證明或求得考題提供的答案而獲得的分數

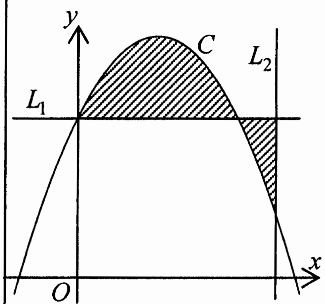
   某些考題包含若干部分，其中某些部分的答案依賴於先前部分的答案。如考生能從先前部分的答案以正確的步驟或方法導出答案，即使先前部分的答案有誤，仍應給予'M' 分（即閱卷員在評定'M' 分時，應跟進考生的解題步驟），但不應給予相關答案的'A' 分，除非另有規定。

6. 在評卷參考中，虛線長方形 代表可略去的步驟，而 實線長方形 則代表其他答案。

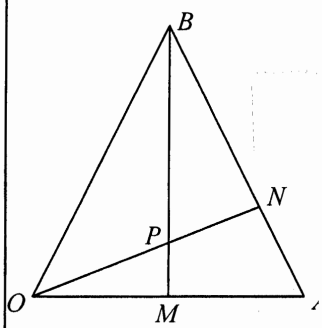
7. (a) 除非考題另有規定，否則不應接納並非真確值的數值答案。
   (b) 若考題規定答案須達至某一程度的精確度，閱卷員不應接納未達該精確度的答案。

解	分	備註
1. $\frac{d}{dx}(\sin 2x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2(x+h)-\sin 2x}{h}$	1M	
$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2}{h}\cos\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}\right)$	1M	
$=\lim_{h\to 0}\left[2\cos(2x+h)\frac{\sin h}{h}\right]$		
$=2\lim_{h\to 0}\cos(2x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$	1M	
另解		
$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h\cos 2x+\cos 2h\sin 2x-\sin 2x}{h}$	1M	
$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h\cos 2x-\sin 2x\cdot 2\sin^2 h}{h}$		
$=2\cos 2x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}-2\sin 2x\cdot\lim_{h\to 0}\sin h\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$	1M	
$=2\cos 2x$	1A	
	(4)	
2. $(1+ax)^n=1+C_1^n ax+C_2^n(ax)^2+\cdots$		或 通項 $=C_r^n(ax)^r$
$\begin{cases} na=-20 & \text{------------------------ (1)} \\ \frac{n(n-1)}{2}a^2=180 & \text{-------------------- (2)}\end{cases}$	1M	
$(2)\div(1)^2$:		
$\frac{n-1}{2n}=\frac{180}{400}$	1M	
$n=10$	1A	
$\therefore\ a=-2$	1A	
	(4)	
3. 對 $n=1$，		
L.H.S. $1+\frac{1}{1\times 4}=\frac{5}{4}$ 及 R.H.S. $=\frac{4(1)+1}{3(1)+1}=\frac{5}{4}$		
$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.，該命題對 $n=1$ 為真。	1	
假設 $1+\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{4k+1}{3k+1}$，其中 k 是正整數。	1	
$1+\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]}$		
$=\frac{4k+1}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$，根據假設	1	
$=\frac{(12k^2+19k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$		
$=\frac{(3k+1)(4k+5)}{(3k+1)(3k+4)}$		
$=\frac{4(k+1)+1}{3(k+1)+1}$	1	
因此該命題對 $n=k+1$ 為真。		
根據數學歸納法原理，該命題對所有正整數 n 為真。	1	跟進
	(5)	

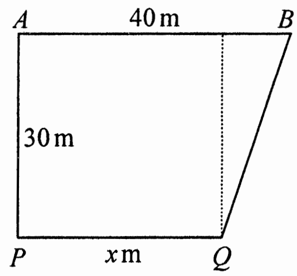
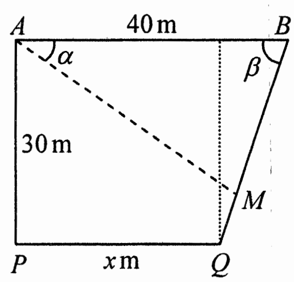
解	分	備註
4. (a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^x-1$		
$y=\int(e^x-1)\,\mathrm{d}x$		
$=e^x-x+C$	1A	
由於該曲線通過點 $(1,e)$， $e=e^1-1+C$ 。	1M	
即 $C=1$		
$\therefore\ y=e^x-x+1$	1A	
(b) 該曲線與 y 軸相交於 $(0,2)$。		
當 $x=0$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 。	1M	
因此該曲線於 $(0,2)$ 的切線方程為		
$y-2=0(x-0)$		
$y=2$	1A	
	(5)	
5. (a) $\mathrm{f}(x)=\dfrac{3-3x^2}{3+x^2}$		
$\therefore\ \mathrm{f}(0)=1,\ \mathrm{f}(1)=0$ 及 $\mathrm{f}(-1)=0$		
$\therefore$ 極大點為 $(0,1)$，	1A	
拐點為 $(1,0)$ 及 $(-1,0)$。	1A	給兩個答案
(b) 由於 $x^2+3>0$，故沒有鉛垂漸近線。		
$\mathrm{f}(x)=-3+\dfrac{12}{x^2+3}$	1M	或 $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\frac{3}{x^2}-3}{\frac{3}{x^2}+1}$
當 $x\to\pm\infty$，$y\to-3$。		
因此水平漸近線為 $y=-3$。	1A	
(c) 	1A 1A	給 $y=\mathrm{f}(x)$ 的形狀 給所有資料皆正確
	(6)	

解	分	備註
6. (a) 面積 $=\int_0^4\left[\left(\frac{-x^2}{2}+2x+4\right)-4\right]\mathrm{d}x+\int_4^5\left[4-\left(\frac{-x^2}{2}+2x+4\right)\right]\mathrm{d}x$	1M	
$=\int_0^4\left(\frac{-x^2}{2}+2x\right)\mathrm{d}x+\int_4^5\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\mathrm{d}x$		
$=\left[\frac{-x^3}{6}+x^2\right]_0^4+\left[\frac{x^3}{6}-x^2\right]_4^5$	1M	
$=\frac{13}{2}$	1A	
(b) 體積 $=\pi\int_0^5\left(\frac{-x^2}{2}+2x+4-4\right)^2\mathrm{d}x$ `	1M+1A	
$=\pi\int_0^5\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x$		
$=\pi\left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^4}{2}+\frac{4x^3}{3}\right]_0^5$		
$=\frac{125\pi}{12}$	1A	
	(6)	
7. (a) R.H.S. $=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$		
$=\frac{2\sin x\cos x}{1+2\cos^2 x-1}$	1M	給任何一條公式
$=\frac{\sin x}{\cos x}$		
$=\tan x$	1	
$=$ L.H.S.		
(b) R.H.S. $=\frac{\sin 8y\cos 4y\cos 2y}{(1+\cos 8y)(1+\cos 4y)(1+\cos 2y)}$		
$=\tan 4y\cdot\frac{\cos 4y\cos 2y}{(1+\cos 4y)(1+\cos 2y)}$ 根據(a)	1M	
$=\frac{\sin 4y\cos 2y}{(1+\cos 4y)(1+\cos 2y)}$	1M	
$=\tan 2y\cdot\frac{\cos 2y}{1+\cos 2y}$ 根據(a)		
$=\frac{\sin 2y}{1+\cos 2y}$		
$=\tan y$ 根據(a)	1	
另解		
$=\frac{\sin 8y\cos 4y\cos 2y}{\left(\frac{\sin 8y}{\tan 4y}\right)\left(\frac{\sin 4y}{\tan 2y}\right)\left(\frac{\sin 2y}{\tan y}\right)}$ 根據(a)	1M	
$=\frac{\sin 8y}{\sin 8y}\cdot\frac{\tan 4y\cos 4y}{\sin 4y}\cdot\frac{\tan 2y\cos 2y}{\sin 2y}\cdot\tan y$		
$=\tan y$	1M + 1	1M 給 $\tan x\cos x=\sin x$
$=$ L.H.S.		
	(5)	

解	分	備註
8. (a) $\begin{pmatrix}1 & k & 0\\0 & 1 & 1\\k & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1 & k & 0\\0 & 1 & 1\\k & 0 & 0\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}0 & k & -k\\0 & 0 & k^2\\k & -1 & 1\end{pmatrix}^T$	1M+1A	1M 給予行列式
$=\dfrac{1}{k^2}\begin{pmatrix}0 & 0 & k\\k & 0 & -1\\-k & k^2 & 1\end{pmatrix}$	1A	
(b) $\begin{pmatrix}1 & k & 0\\0 & 1 & 1\\k & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix}x\\1\\z\end{pmatrix}=\dfrac{1}{k^2}\begin{pmatrix}0 & 0 & k\\k & 0 & -1\\-k & k^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ 根據(a)	1M	
$=\dfrac{1}{k^2}\begin{pmatrix}k\\2k-1\\2k^2-2k+1\end{pmatrix}$		
由第二行，可得 $\dfrac{2k-1}{k^2}=1$ 。		
另解 $\begin{pmatrix}x+k\\1+z\\kx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ 由第一及第三行，可得 $x+k=2$ 和 $x=\dfrac{1}{k}$ 。 $\therefore\ \dfrac{1}{k}+k=2$ 。	1M	
即 $k^2-2k+1=0$ $k=1$	1A	
	(5)	
9. (a) 增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -a & 1 & 2\\2 & 1-2a & 2-b & a+4\\3 & 1-3a & 3-ab & 4\end{array}\right)$		
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -a & 1 & 2\\0 & 1 & -b & a\\0 & 1 & -ab & -2\end{array}\right)$	1M	
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -a & 1 & 2\\0 & 1 & -b & a\\0 & 0 & ab-b & a+2\end{array}\right)$		
因此在以下條件下，方程組有無窮多個解 $\begin{cases}b(a-1)=0\\a+2=0\end{cases}$	1M	
即 $a=-2$ 和 $b=0$	1A	給兩個答案

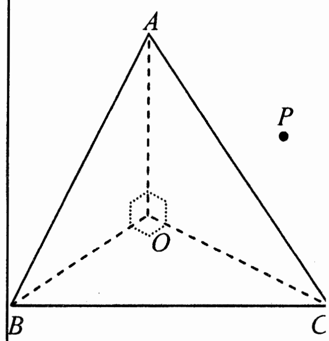
解	分	備註
(b) 方程組變為 $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y + 2z = 2 \\ 3x + 7y + 3z = 4 \end{cases}$	1M	
即 $\begin{cases} x+z=6 \\ y=-2 \end{cases}$		
$(x, y, z)=(6-t, -2, t)$，對任何實數 t	1A	或 $(t, -2, 6-t)$
	(5)	
10. (a) $\overrightarrow{ON}=\dfrac{k\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{k+1}$	1M	
$=\dfrac{k(2\mathbf{i})+(\mathbf{i}+2\mathbf{j})}{k+1}$		
$=\dfrac{(2k+1)\mathbf{i}+2\mathbf{j}}{k+1}$	1A	
(b) $\because$ $\overrightarrow{MB}=2\mathbf{j}$ ， $\therefore$ $BM \perp OA$	1M	
由於 A、N、P 與 M 共圓， $ON \perp AB$ 。		
$\therefore$ $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AB}=0$	1M	
$\dfrac{(2k+1)\mathbf{i}+2\mathbf{j}}{k+1}\cdot(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{i})=0$		
$-(2k+1)+2\cdot 2=0$		
$k=\dfrac{3}{2}$	1A	
	(5)	
11. (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln(\sec\theta+\tan\theta)=\dfrac{\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$	1M	
$=\sec\theta$		
因此 $\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta=\int\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln(\sec\theta+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta$		
$=\ln(\sec\theta+\tan\theta)+C$	1	
另解		
$\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta=\int\dfrac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$	1M	
設 $u=\sec\theta+\tan\theta$，由此得 $\mathrm{d}u=(\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta)\mathrm{d}\theta$ 。		
$\therefore$ $\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta=\int\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$		
$=\ln\lvert u\rvert+C$		
$=\ln(\sec\theta+\tan\theta)+C$ ，因 $\sec\theta+\tan\theta>0$ ，對 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$	1	
	(2)	

解	分	備註
(b) (i) 設 $u=\sec\theta$，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 。	1M	
$\therefore\ du=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$		
$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\int\frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$		
$=\int\sec\theta\, d\theta$ ，因 $\tan\theta>0$ ，對 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$		
$=\ln(\sec\theta+\tan\theta)+C$ 根據(a)		
$=\ln(\sec\theta+\sqrt{\sec^2\theta-1})+C$ ，因 $\tan\theta>0$ ，對 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$		
$=\ln(u+\sqrt{u^2-1})+C$	1	
(ii) $\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{x^4+4x^2+3}}dx=\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{(x^2+2)^2-1}}dx$		
設 $u=x^2+2$，由此得 $du=2x\,dx$ 。	1M	
當 $x=0$ ，$u=2$；當 $x=1$ ，$u=3$ 。		
$\therefore\ \int_0^1\frac{2x}{\sqrt{x^4+4x^2+3}}dx=\int_2^3\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$		
$=\left[\ln(u+\sqrt{u^2-1})\right]_2^3$ 根據(i)	1M	給原函數
$=\ln(3+\sqrt{8})-\ln(2+\sqrt{3})$		
$=\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$		
$=\ln(6+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$	1	
	(5)	
(c) $t=\tan\phi$		
$\frac{dt}{d\phi}=\sec^2\phi$		
$=1+\tan^2\phi$		
$\therefore\ \frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$	1	
$\cos^2\phi=\frac{1}{\sec^2\phi}$		
$=\frac{1}{1+t^2}$	1A	
$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\phi}{\sqrt{1+2\cos^2\phi}}d\phi=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1+\frac{2}{1+t^2}}}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$ ，其中 $t=\tan\phi$	1M	
$=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{(3+t^2)(1+t^2)}}dt$	1A	
$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t}{\sqrt{t^4+4t^2+3}}dt$		
$=\frac{1}{2}\ln(6+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$	1A	或 $\ln\sqrt{6+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$
	(5)	

解	分	備註
12. (a) (i) $T=\dfrac{PQ}{7}+\dfrac{QB}{1.4}$	1M	
$=\dfrac{x}{7}+\dfrac{5\sqrt{30^2+(40-x)^2}}{7}$		
$=\dfrac{x+5\sqrt{x^2-80x+2500}}{7}$	1A	或 $\dfrac{x}{7}+\dfrac{\sqrt{x^2-80x+2500}}{1.4}$
(ii) 當 T 達到極小值時，$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=0$ 。		
$\dfrac{1}{7}\left[1+\dfrac{5(2x-80)}{2\sqrt{x^2-80x+2500}}\right]=0$	1M	
$5(x-40)=-\sqrt{x^2-80x+2500}$		
$25x^2-2000x+40000=x^2-80x+2500$		
$2x^2-160x+3125=0$	1	
$\therefore\ x=40-\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ 或 $40+\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ （經檢驗後予以捨去）		
<table><tr><td>x</td><td>$0<x<40-\frac{5\sqrt{6}}{2}$</td><td>$x=40-\frac{5\sqrt{6}}{2}$</td><td>$x>40-\frac{5\sqrt{6}}{2}$</td></tr><tr><td>$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>		
因此，當 T 達到極小值時，$x=40-\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ 。	1M	
$QB=\sqrt{30^2+\left[40-\left(40-\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\right)\right]^2}$		
$=\dfrac{25\sqrt{6}}{2}$ m	1	
	(6)	
(b) (i) $\sin\beta=\dfrac{30}{\frac{25\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$	1A	
$\cos\beta=\dfrac{40-\left(40-\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)}{\frac{25\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{1}{5}$	1A	
在 ΔMAB 中，$\dfrac{MB}{\sin\alpha}=\dfrac{AB}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}$ 。	1M	
$MB=\dfrac{40\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$		
$=\dfrac{40\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$	1M	
$=\dfrac{40\sin\alpha}{\frac{1}{5}\sin\alpha+\frac{2\sqrt{6}}{5}\cos\alpha}$		
$=\dfrac{200\tan\alpha}{\tan\alpha+2\sqrt{6}}$	1	

解	分	備註
(ii) $\frac{dMB}{dt}=200\cdot\frac{(\tan\alpha+2\sqrt{6})\sec^2\alpha-\tan\alpha\sec^2\alpha}{(\tan\alpha+2\sqrt{6})^2}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$	1M	
$=\frac{400\sqrt{6}\sec^2\alpha}{(\tan\alpha+2\sqrt{6})^2}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$		
$\therefore\quad -1.4=\frac{400\sqrt{6}\sec^2 0.2}{(\tan 0.2+2\sqrt{6})^2}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$		
$\frac{d\alpha}{dt}\approx-0.0357\ \text{rad s}^{-1}$	1A	
	(7)	
13. (a) (i) $MN=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}$		
$=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}$		
$\text{tr}(MN)=ae+bg+cf+dh$	1A	任何一式
$NM=\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$		
$=\begin{pmatrix}ea+fc & eb+fd\\ ga+hc & gb+hd\end{pmatrix}$		
$\text{tr}(NM)=ea+fc+gb+hd$		
$\therefore\quad \text{tr}(MN)=\text{tr}(NM)$	1	
(ii) $\text{tr}(BAB^{-1})=1+3$		
$\text{tr}(AB^{-1}B)=4$ 根據(a)(i)	1M	或 $\text{tr}(B^{-1}BA)=4$
$\text{tr}(A)=4$	1	
(iii) $BAB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$		
$\lvert BAB^{-1}\rvert=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}$		
$\lvert B\rvert\cdot\lvert A\rvert\cdot\lvert B^{-1}\rvert=1\cdot 3-0\cdot 0$	1M	
$\lvert B\rvert\cdot\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert^{-1}=3$		
$\lvert A\rvert=3$	1A	
	(6)	

解	分	備註
(b) (i) $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix}px+qy\\rx+sy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 x\\\lambda_1 y\end{pmatrix}$		
$\begin{cases}(p-\lambda_1)x+qy=0\\rx+(s-\lambda_1)y=0\end{cases}$	1A	
由於該方程組有非零解 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\begin{vmatrix}p-\lambda_1 & q\\r & s-\lambda_1\end{vmatrix}=0$ 。	1	
同樣，由 $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 可得 $\begin{vmatrix}p-\lambda_2 & q\\r & s-\lambda_2\end{vmatrix}=0$ 。	1	
(ii) 根據(b)(i)，λ_1 和 λ_2 是方程的根。 $\begin{vmatrix}p-\lambda & q\\r & s-\lambda\end{vmatrix}=0$	1M	
$(p-\lambda)(s-\lambda)-qr=0$		
$\lambda^2-(p+s)\lambda+ps-qr=0$		
$\lambda^2-\mathrm{tr}(C)\cdot\lambda+\lvert C\rvert=0$	1	
	(5)	
(c) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，對至少一個非零矩陣 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$		
$\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\cdot\lambda+\lvert A\rvert=0$ 根據(b)(ii) $\lambda^2-4\lambda+3=0$ 根據(a)(ii)及(a)(iii)	1M	給任何一式
$\lambda=1$ or 3	1A	
	(2)	

解	分	備註
14. (a) (i) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\mathbf{p}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{b})$	1M	給 $\mathbf{p}-\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{p}-\mathbf{b}$
$=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{p}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$		
$=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{p}$ $\quad(\because\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0)$	1	
(ii) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ 根據(i)及類似結果，可得		
$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{p}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{p}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot\mathbf{p}=0$	1M	
$3\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-2(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{p}=0$		
$3\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-2(3\mathbf{d})\cdot\mathbf{p}=0$	1M	
$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=2\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}$ -------------------------------- (*)	1	
(iii) $\lvert\mathbf{p}-\mathbf{d}\rvert^2=(\mathbf{p}-\mathbf{d})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{d})$	1M	
$=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-2\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$ $=\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}$ 根據(*) $=\lvert\mathbf{d}\rvert^2$		
因此 $\lvert\mathbf{p}-\mathbf{d}\rvert=\lvert\mathbf{d}\rvert$ 。	1	
$\therefore\ \lvert\overrightarrow{DP}\rvert=\lvert\overrightarrow{OD}\rvert$ $\therefore\ PD=OD$ ------------------------------ (**)		
因此，P 與 D 的距離為常數， 由此可知 P 位於以 D 為球心且有固定半徑的球體上。	1	
	(8)	
(b) (i) 是，因為 O 滿足(**)，故 O 位於(i)提到的球體上。	1A	或「由於 OD 等於球體的半徑，...」
(ii) 是，由於 $\overrightarrow{DP_1}\times\overrightarrow{DP_2}=\overrightarrow{DP_2}\times\overrightarrow{DP_3}$，包含 D、P_1 及 P_2 的平面的法線向量等於包含 D、P_2 及 P_3 的平面的法線向量。	1M	
因此包含 D、P_1 及 P_2 的平面與包含 D、P_2 及 P_3 的平面平行 由於 D 和 P_2 是上述平面的共同點，D、P_1、P_2 和 P_3 位於同一平面上。	1M	
由於 D 是球心並且 P_1、P_2 和 P_3 位於球體上的最大圓， 該圓的半徑等於球體的半徑，即 OD。	1A	跟進
	(4)	