

2012-DSE

數學 延伸部分  
單元一

香港考試及評核局

2012年香港中學文憑考試

## 數學 延伸部分 單元一（微積分與統計）

### 試題答題簿

本試卷必須用中文作答  
兩小時三十分鐘完卷（上午八時三十分至上午十一時）

#### 考生須知

1. 宣布開考後，考生須首先在第1頁之適當位置填寫考生編號，並在第1、3、5及7頁之適當位置貼上電腦條碼。
2. 本試卷分甲、乙兩部。試卷內各題均須作答。
3. 甲部的答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
4. 乙部的答案須寫在 DSE(B) 答題簿內。每題（非指分題）必須另起新頁作答。
5. 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每一紙張均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於簿內。
6. 完考時，試題答題簿及答題簿須分開交回。
7. 除特別指明外，所有算式須詳細列出。
8. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。
9. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
10. 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

© 香港考試及評核局 保留版權  
Hong Kong Examinations and Assessment Authority  
All Rights Reserved 2012

**甲部 (50分)**

本部答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。

1. 設  $n$  為正整數。

(a) 依  $x$  的升冪次序展開  $(1+3x)^n$  到含  $x^2$  的項為止。

(b) 已知在  $e^{-2x}(1+3x)^n$  的展式中  $x^2$  的係數為 62，求  $n$  的值。

(4分)

2. 某樓宇單位價值  $V$  (以百萬元為單位) 的變率可表示為  $\frac{dV}{dt} = \frac{t}{\sqrt{4t+1}}$ ，其中  $t$  是由 2012 年開始時起計的年數。該單位的價值於 2012 年開始時為 3 百萬元。求從 2012 年開始時至 2014 年開始時該單位價值改變的百分數。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

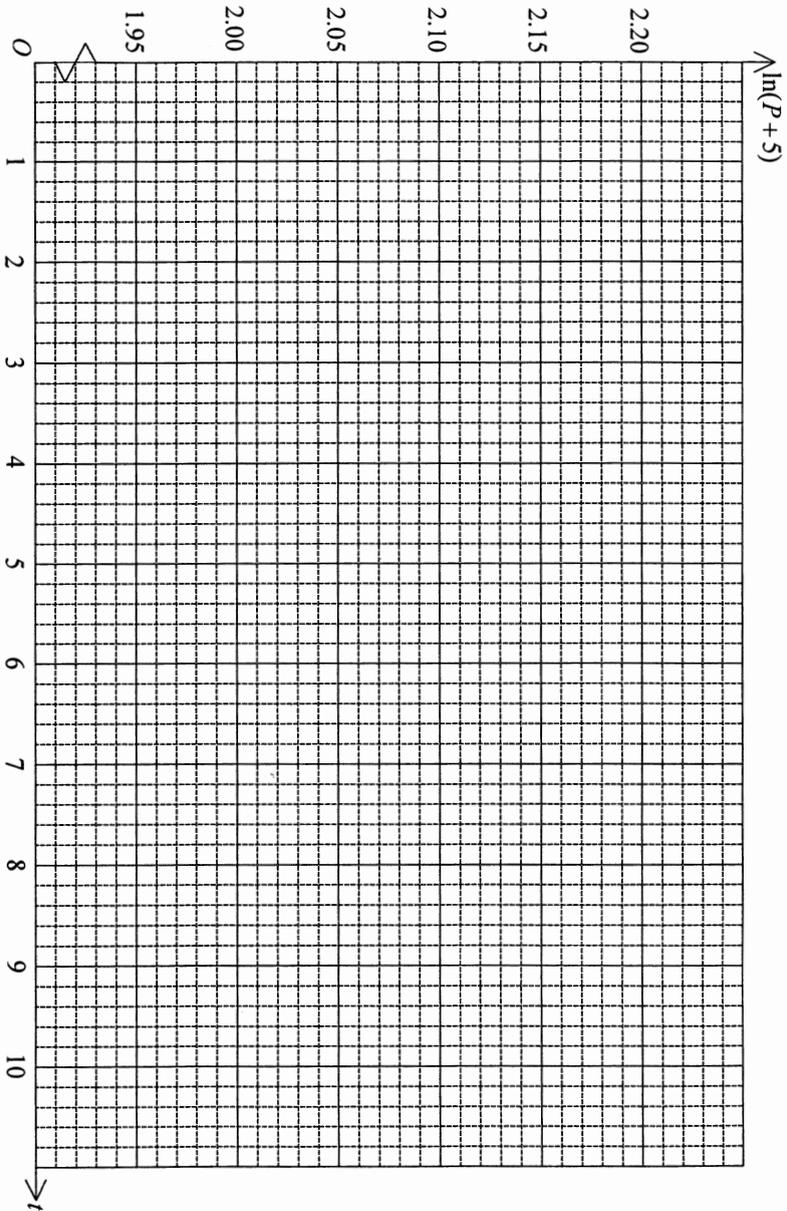
3. 某城市的人口  $P$  (以百萬人為單位) 可用  $P = ae^{\frac{kt}{40}} - 5$  模擬，其中  $a$  和  $k$  為常數， $t$  則是由某一年開始時起計的年數。下表記錄該城市的人口。

$t$	2	4	6	8	10
$P$	2.36	2.81	3.23	3.55	4.01

(a) 將  $\ln(P+5)$  表為  $t$  的線性函數。

(b) 利用下面的方格紙，估算  $a$  和  $k$  的值，答案須準確至最接近的整數。

(5分)



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

A large rectangular area with horizontal lines for writing answers. The lines are evenly spaced and cover most of the page's width and height.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 設  $y = \sqrt[3]{\frac{3x-1}{x-2}}$ ，其中  $x > 2$ 。

(a) 使用對數微分法，以  $x$  表  $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$ 。

(b) 利用(a)的結果，求當  $x=3$  時  $\frac{d^2y}{dx^2}$  的值。

(6分)

5. 某曲線  $S$  於其上任意點  $(x, y)$  的切線斜率可表示為  $\frac{dy}{dx} = e^{2x}$ 。設  $L$  為  $S$  於其上一點  $A(0, 1)$  的切線。

(a) 求  $S$  的方程。

(b) 求  $L$  的方程。

(c) 求  $S$ 、 $L$  及直線  $x=1$  所圍成區域的面積。

(7分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

A large rectangular area with horizontal lines for writing answers. The lines are evenly spaced and cover most of the page's width and height.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. 某學校學生的體重（以 kg 為單位）可用平均值為 67、標準差為 15 的正態分佈模擬。現隨機選取 36 名學生組成一樣本。

(a) 求該 36 名學生的平均體重超過 70 kg 的概率。

(b) 已知該樣本中的 9 名學生喜歡吃炸薯條。求該學校中喜歡吃炸薯條的學生所佔比例的近似 95% 置信區間。

(5 分)

7. 某足球隊在隨機選取的一場球賽中的入球數目服從平均值為  $\lambda$  的泊松分佈。該球隊在一場球賽中沒有入球的概率為 0.1653。

(a) 求  $\lambda$  的值，答案準確至 1 位小數。

(b) 求該球隊在一場球賽中入球數目少於 3 的概率。

(c) 已知該球隊在任何兩場球賽中的入球數目相互獨立。求該球隊在隨機選取的兩場球賽中入球總數少於 3 的概率。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 設  $X$  為離散隨機變量，其概率函數如下表所示：

$x$	1	3	4	6	9	13
$P(X=x)$	0.1	$a$	0.25	0.15	$b$	0.05

其中  $a$  和  $b$  為常數。已知  $E(X) = 5.5$ 。

- (a) 求  $a$  和  $b$  的值。
- (b) 設  $F$  為事件  $X \geq 4$ ， $G$  為事件  $X < 8$ 。
- (i) 求  $P(F \cap G)$ 。
- (ii)  $F$  和  $G$  是否獨立事件？試解釋你的答案如何達至。

(6分)

9. 在參加某次數學測驗的學生中，73% 在測驗前有溫習。有溫習的學生的得分為  $N(59, 10^2)$  所能模擬的實數，而沒有溫習的學生的得分為  $N(35.2, 12^2)$  所能模擬的實數。得分至少 43 分的學生為測驗及格。

- (a) 求一名隨機選取的學生測驗及格的概率。
- (b) 給定一名隨機選取的學生測驗及格的條件，求該名學生在測驗前沒有溫習的概率。
- (c) 現從測驗及格的學生中隨機選取十名學生。求在這些學生中恰有四人在測驗前沒有溫習的概率。

(7分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

**乙部 (50分)**

本部答案須寫在 DSE(B) 答題簿內。

10. 設  $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2}} dt$ 。

(a) (i) 利用有 6 個子區間的梯形法則估算  $I$ 。

(ii) (a)(i)中的估算值是過高還是過低？試解釋你的答案如何達至。

(7分)

(b) 利用適當的代換，證明  $I = 2 \int_1^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ 。

(3分)

(c) 利用上面的結果和第 14 頁的標準正態分佈表，證明  $\pi < 3.25$ 。

(3分)

11. 一名專家在研究某城市的輻射強度時，用下式模擬輻射強度  $R$  (採用適當的單位) 的變率：

$$\frac{dR}{dt} = \frac{a(30-t)+10}{(t-35)^2 + b}$$

其中  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) 是自研究開始起計的日數， $a$ 、 $b$  和  $T$  為正常數。

已知輻射強度在  $t=35$  時升至最大值，其值為 6 個單位；然後在  $t=T$  時降至研究開始時的水平。

此外，輻射強度由  $t=40$  至  $t=41$  下降了  $\ln \frac{61}{50}$  個單位。

(a) 求  $a$  的值。

(2分)

(b) 求  $T$  的值。

(4分)

(c) 以  $t$  表  $R$ 。

(4分)

(d) 對於  $0 \leq t \leq 35$ ，輻射強度的變率於何時達到最大值？

(4分)

12. 某公司為旅客提供吊車服務。旅客投訴輪候吊車的時間過長。根據過往經驗，一名隨機選取的旅客的輪候時間（以分鐘為單位）服從平均值為  $\mu$ 、標準差為 9 的正態分佈。

(a) 該公司的客戶服務經理就輪候時間進行調查以便估算  $\mu$ 。

(i) 現隨機選取 16 名旅客組成一樣本，他們的輪候時間記錄如下：

56	36	48	63	57	41	50	43
56	55	62	46	55	69	38	50

求  $\mu$  的 90% 置信區間。

(ii) 求最小樣本容量使  $\mu$  的 90% 置信區間的寬度小於 6 分鐘。

(7 分)

(b) 假設  $\mu = 51.5$ 。公司的客戶服務經理會見旅客，並向每名輪候時間超過 65 分鐘的旅客贈送一張優惠券。

(i) 求經理向他所會見的首 10 名旅客送出少於 2 張優惠券的概率。

(ii) 求第 5 張優惠券是贈予經理會見的第 20 名旅客的概率。

(6 分)

13. 在某城市中醉酒駕駛是違法行為。警方於晚上在某條公路的入口處設置檢查路障，以拘捕醉駕司機。根據過往經驗，被捕的醉駕司機數目服從泊松分佈，其平均值為每小時 2.3。

(a) 求在某小時內有至少 2 名醉駕司機被捕的概率。

(2 分)

(b) 給定在某小時內有至少 2 名醉駕司機被捕的條件，求不多於 4 名醉駕司機被捕的概率。

(3 分)

(c) 在某星期內，警方在三個晚上設置檢查路障，時間均為凌晨 1 時至 2 時。已知各個晚上被捕醉駕司機的數目相互獨立。

(i) 求第三晚為首個有至少 2 名醉駕司機被捕的晚上的概率。

(ii) 求在三晚中的每一晚均有至少 2 名醉駕司機被捕並且合共有 10 名醉駕司機被捕的概率。

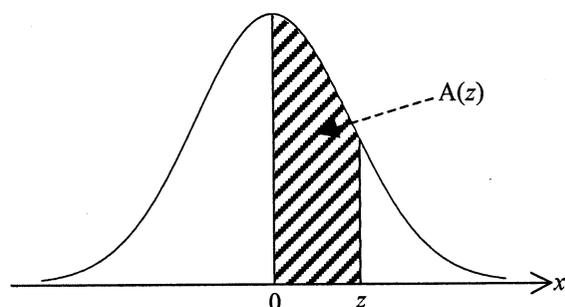
(5 分)

**試卷完**

### 標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註：本表所列數字為標準正態曲線下由  $x=0$  至  $x=z$  ( $z \geq 0$ ) 之間的面積。  
負值  $z$  所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$