

香港考試及評核局
2017年香港中學文憑考試

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）

試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷
（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

- （一）宣布開考後，考生須首先在第1頁之適當位置填寫考生編號，並在第1、3、5、7、9、11及13頁之適當位置貼上電腦條碼。
- （二）本試卷分**兩部**，即甲部和乙部。
- （三）本試卷**各題均須作答**，答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
- （四）如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每張紙均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於簿內。
- （五）除特別指明外，須詳細列出所有算式。
- （六）除特別指明外，數值答案須用真確值表示。
- （七）試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

©香港考試及評核局 保留版權
Hong Kong Examinations and Assessment Authority
All Rights Reserved 2017

請在此貼上電腦條碼

考生編號



參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
---	--

甲部 (50 分)

1. 從基本原理求 $\frac{d}{d\theta} \sec 6\theta$ 。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

2. 設 $(1+ax)^8 = \sum_{k=0}^8 \lambda_k x^k$ 及 $(b+x)^9 = \sum_{k=0}^9 \mu_k x^k$ ，其中 a 及 b 均為常數。已知 $\lambda_2 : \mu_7 = 7 : 4$ 及 $\lambda_1 + \mu_8 + 6 = 0$ 。求 a 。(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. P 為 AB 上的一點使得 $AP:PB=3:2$ 。設 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ 及 $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ ，其中 O 為原點。

(a) 以 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 表 $\overrightarrow{OP}$ 。

(b) 已知 $|\mathbf{a}|=45$ 、 $|\mathbf{b}|=20$ 及 $\cos\angle AOB=\frac{1}{4}$ 。求

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ，

(ii) $|\overrightarrow{OP}|$ 。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

4. (a) 利用分部積分法，求 $\int x^2 e^{-x} dx$ 。

(b) 求 $y = x^2 e^{-x}$ 的圖像、 x 軸與直線 $x = 6$ 圍成的區域的面積。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 考慮下列實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} x + 2y - z = 11 \\ 3x + 8y - 11z = 49 \\ 2x + 3y + hz = k \end{cases}, \text{ 其中 } h, k \in \mathbf{R}.$$

(a) 假設 (E) 有唯一解。

(i) 求 h 值的範圍。

(ii) 以 h 及 k 表 z 。

(b) 假設 (E) 有無限多個解。解 (E) 。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. (a) 證明 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ 。

(b) 設 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ 。

(i) 證明 $\frac{\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos 3x + \sin 3x}{\cos x - \sin x}$ 。

(ii) 解方程 $\frac{\cos 3x + \sin 3x}{\cos x - \sin x} = 2$ 。

(8分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 設 $f(x)$ 為一定義在 $\mathbf{R}^+$ 上的連續函數，其中 $\mathbf{R}^+$ 為正實數集。將曲線 $y=f(x)$ 記為 Γ 。已知 Γ 通過點 $P(e^3, 7)$ 且對所有 $x > 0$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} \ln x^2$ 。求

(a) Γ 在 P 的切線的方程，

(b) Γ 的方程，

(c) Γ 的拐點。

(8 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 對所有 $x \neq -4$ ，定義 $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}$ 。將 $y = f(x)$ 的圖像記為 G 。

- (a) 求 G 的漸近線。 (3 分)
- (b) 求 $f'(x)$ 。 (2 分)
- (c) 求 G 的極大點及極小點。 (4 分)
- (d) 設 R 為 G 與 x 軸圍成的區域。求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。 (4 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

(a) 藉以 r 表 $\overrightarrow{AE}$ 及 $\overrightarrow{AF}$ ，求 r 。(4分)

(ii) B 、 D 、 C 與 F 是否共圓？解釋你的答案。

This image shows a single page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2017-DSE-MATH-EP(M2)–18

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. (a) 利用 $\tan^{-1}\sqrt{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ ，計算 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+3} dx$ 。(3分)

(b) (i) 設 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 。證明 $\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin 2\theta$ 及 $\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta$ 。

(ii) 利用代換 $t = \tan \theta$ ，計算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2\theta + \cos 2\theta + 2} d\theta$ 。(5分)

(c) 證明 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta + 1}{\sin 2\theta + \cos 2\theta + 2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta + 1}{\sin 2\theta + \cos 2\theta + 2} d\theta$ 。(2分)

(d) 計算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8 \sin 2\theta + 9}{\sin 2\theta + \cos 2\theta + 2} d\theta$ 。(3分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 設 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 。將 2×2 單位矩陣記為 I 。

(a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ， $A^n = 3^n I + 3^{n-1} n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。(4分)

(b) 設 $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(i) 定義 $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 。計算 $P^{-1}BP$ 。

(ii) 證明對任意正整數 n ， $B^n = 3^n I + 3^{n-1} n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ 。

(iii) 是否存在正整數 m 使得 $|A^m - B^m| = 4m^2$ ？解釋你的答案。

(8分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

- 試卷完 -

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。