香 港 考 試 及 評 核 局
HONG KONG EXAMINATIONS AND ASSESSMENT AUTHORITY

2 0 1 2 年 香 港 中 學 文 憑 考 試
HONG KONG DIPLOMA OF SECONDARY EDUCATION EXAMINATION 2012

數學 延伸部分
單元二（代數與微積分）

MATHEMATICS Extended Part
Module 2 (Algebra and Calculus)

評 卷 參 考

MARKING SCHEME

評卷一般指引

1. 所有閱卷員均應盡量依循本評卷參考評卷。但在很多情況下，考生可能使用評卷參考所述以外的方法求得正確答案。一般而言，除非考題指明須使用某種解題方法，否則考生若使用另外的方法求得正確答案，應獲得該部分的所有分數。如遇考生使用評卷參考以外的方法解題，閱卷員應耐心評閱。

2. 爲方便閱卷員，本評卷參考採取盡量詳盡無遺的形式。但考生的解答不一定採取同樣清晰的形式，例如可能略去或沒有言明某些解題步驟。在這些情況下，閱卷員應酌情評分。一般而言，解答如能顯示考生在某一解題步驟運用了相關概念／技巧，則應給予該步驟的分數。

3. 在評分時，任何疑點的利益應歸於考生。

4. 除非考題指明答案須採取的形式，如考生的答案正確，即使該答案的形式較評卷參考提供的形式簡單，仍應予接納。

5. 除非考題另有規定，否則不應因考生採用與評卷參考有別的數學符號而扣分。

6. 評卷參考上的分數分爲以下三類：

‘M’ 分	–	使用正確解題方法而獲得的分數
‘A’ 分	–	提供準確答案而獲得的分數
‘M’ 或 ‘A’ 以外的分數	–	正確完成證明或求得考題提供的答案而獲得的分數

   某些考題包含若干部分，其中某些部分的答案依賴於先前部分的答案。如考生能從先前部分的答案以正確的步驟或方法導出答案，即使先前部分的答案有誤，仍應給予 ‘M’ 分（即閱卷員在評定 ‘M’ 分時，應跟進考生的解題步驟），但不應給予相關答案的 ‘A’ 分，除非另有規定。

7. 在評卷參考中，虛線長方形代表可略去的步驟，而 $\boxed{\text{實線長方形}}$ 則代表其他答案。

8. 如考生的表述方式不恰當(*pp*)，包括使用錯誤的單位／漏寫單位，應予扣分。請注意以下各點：
   (a) 最多只可因 *pp* 而扣去 2 分。
   (b) 在任何情況下，如考生在某些步驟中沒有取得任何分數，不應因 *pp* 而扣分。

9. (a) 除非考題另有規定，否則不應接納並非真確值的數值答案。
   (b) 若考題規定答案須達至某一程度的精確度，閱卷員不應接納未達該精確度的答案。答案如超出所規定的精確度，則應扣去一分(*pp*)。在任何情況下，如考生在某些步驟中沒有取得任何分數，不應因答案超出所規定的精確度而扣分。

Solution	Marks	Remarks
1. $f(x)=e^{2x}$		
$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2(0+h)}-e^{2(0)}}{h}$	1M	
$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{2h}\cdot 2$	1M	接受 $\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{h}$
$=2$	1A	
	(3)	
2. $(1+ax)^n=1+nax+\frac{n(n-1)}{2}(ax)^2+\cdots$	1M+1A	1A 給 $\frac{n(n-1)}{2}$
因此 $na=6$ 和 $\frac{n(n-1)}{2}a^2=16$ 。	1M	
解聯立方程，得 $\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{6}{n}\right)^2=16$		
$18(n-1)=16n$		
$n=9$	1A	
因此， $a=\frac{2}{3}$ 。	1A	
	(5)	
3. 考慮 $n=1$ ，		
左端 $=1\times 2=2$ ，右端 $=1^2(1+1)=2$		
$\therefore$ 左端 = 右端，該命題對 $n=1$ 成立。	1	
假設 $1\times 2+2\times 5+3\times 8+\cdots+k(3k-1)=k^2(k+1)$ ，其中 k 爲正整數。	1	
$1\times 2+2\times 5+3\times 8+\cdots+k(3k-1)+(k+1)[3(k+1)-1]$		
$=k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)$ 根據假設	1	
$=(k+1)(k^2+3k+2)$		
$=(k+1)^2(k+1+1)$	1	
因此該命題對 $n=k+1$ 成立。		
根據數學歸納法原理，該命題對任意正整數 n 成立。	1	跟進
	(5)	
4. (a) $\int\frac{x+1}{x}\,dx=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$	1M	
$=x+\ln\lvert x\rvert+C$	1A	
(b) 設 $u=x^2-1$ 。		
$du=2x\,dx$		
$\int\frac{x^3}{x^2-1}\,dx=\int\frac{u+1}{u}\cdot\frac{du}{2}$	1A	
$=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\ln\lvert u\rvert+C$ 根據 (a)	1M	
$=\frac{1}{2}(x^2-1)+\frac{1}{2}\ln\lvert x^2-1\rvert+C$	1A	或 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln\lvert x^2-1\rvert+C$
	(5)	

Solution	Marks	Remarks
5. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$		
$=x+\dfrac{1}{x+1}$	1M	
$\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$	1A	或 $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$
$\dfrac{dy}{dx}=0$，當 $x=-2$ 或 0		

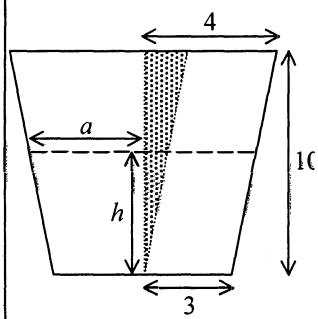
x	$x<-2$	-2	$-2<x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$x>0$
$\dfrac{dy}{dx}$	>0	0	<0	無定義	<0	0	>0

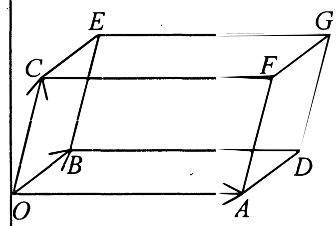
1M

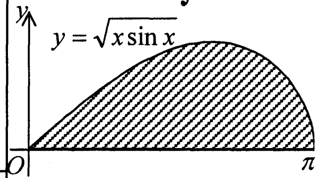
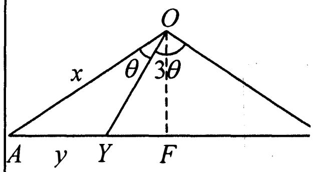
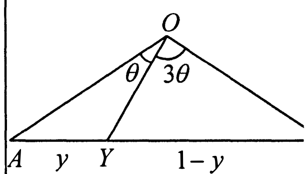
另解

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

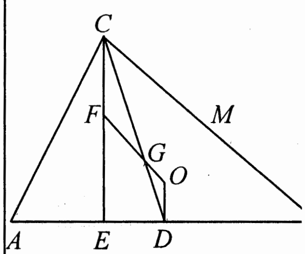
當 $x=0$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=2>0$；當 $x=-2$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-2<0$。 1M

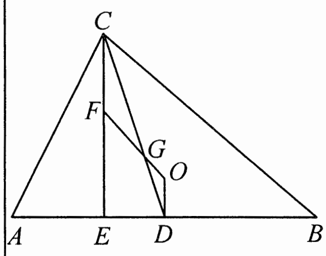
Solution	Marks	Remarks
因此 $(0,1)$ 是極小點。	1A	
鉛垂漸近線為 $x=-1$。	1A	
$\because \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$		接受 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$
$\therefore$ 斜漸近線為 $y=x$	1A	
	(6)	
6. (a) 設水面的半徑為 a cm。		
通過考慮相似三角形，$\dfrac{a-3}{4-3}=\dfrac{h}{10}$。	1M	
即 $a=\dfrac{h+30}{10}$		
$\therefore V=\dfrac{\pi}{3}h\left[3^2+3\left(\dfrac{h+30}{10}\right)+\left(\dfrac{h+30}{10}\right)^2\right]$	1M	
$=\dfrac{\pi}{300}h[900+30(h+30)+(h^2+60h+900)]$		
$=\dfrac{\pi}{300}(h^3+90h^2+2700h)$	1	
(b) $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{300}(3h^2+180h+2700)\dfrac{dh}{dt}$	1M+1A	
$\therefore 7\pi=\dfrac{\pi}{300}[3(5)^2+180(5)+2700]\dfrac{dh}{dt}$		
$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{4}{7}$	1A	
即水深的遞增速率為 $\dfrac{4}{7}\text{ cm s}^{-1}$。		
	(6)	

Solution	Marks	Remarks
7. (a) 平行四邊形 $OADB$ 的面積		
$=\lvert(6\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}+\mathbf{j})\rvert$	1M	
$=\lvert\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}\rvert$		
$=\sqrt{1^2+2^2+2^2}$		
$=3$	1A	
(b) 平行六面體 $OADBECFG$ 的體積		
$=(6\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(5\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$	1M	
$=(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})\cdot(5\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$		
$=1\cdot5+(-2)(-1)+2\cdot2$		
$=11$		
因此點 C 與平面 $OADB$ 之間的距離爲 $\frac{11}{3}$。	1M+1A	1M 給高 = 體積 / 底面積
	(5)	
8. (a) 增廣矩陣爲 $\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&0\\2&-1&5&6\end{array}\right)$		
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&0\\0&-3&3&6\end{array}\right)$	1M	
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&0\\0&1&-1&-2\end{array}\right)$		
設 $z=t$，其中 t 爲實數，則有 $y=t-2$ 和 $x=2-2t$。	1A	或 解集 = $\{(2-2t,t-2,t):t\in\mathbf{R}\}$
(b) 把 $(x,y,z)=(2-2t,t-2,t)$ 代入最後一個方程：	1M	
$(2-2t)-(t-2)+\lambda(t)=4$		
$(\lambda-3)t=0$		
當 $\lambda\neq3$，$t=0$。		
$\therefore\ (x,y,z)=(2,-2,0)$	1A	
當 $\lambda=3$，t 可以爲任何實數。		
$\therefore\ (x,y,z)=(2-2t,t-2,t)$	1A	
<u>另解</u>		
增廣矩陣爲 $\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&0\\2&-1&5&6\\1&-1&\lambda&4\end{array}\right)$		
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&0\\0&-3&3&6\\0&-2&\lambda-1&4\end{array}\right)$	1M	
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&0\\0&1&-1&-2\\0&0&\lambda-3&0\end{array}\right)$		
當 $\lambda\neq3$，$z=0$。		
$\therefore\ (x,y,z)=(2,-2,0)$	1A	
當 $\lambda=3$，z 可以爲任何實數。		
$\therefore\ (x,y,z)=(2-2t,t-2,t)$，其中 t 爲實數。	1A	
	(5)	

Solution	Marks	Remarks
9. (a) $\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx$	1M	
$= -x\cos x + \sin x + C$	1A	
(b) 體積 $= \pi\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$	1M	1M 給 $V = \pi\int y^2\,dx$
$= \pi[-x\cos x + \sin x]_0^{\pi}$		
$= \pi^2$	1A	
	(4)	
10. (a) 設 F 為 AB 上一點使得 $OF \perp AB$ 。設 OA 為 x。		
$\therefore\ AF = \frac{1}{2}$ 和 $\angle AOF = 2\theta$（等腰三角形的性質）		
在 ΔOAF 上，$\sin 2\theta = \frac{\frac{1}{2}}{x}$	1M	
另解 在 ΔOAB 上，$\frac{1}{\sin 4\theta} = \frac{x}{\sin(90°-2\theta)}$	1M	或 $x^2 = x^2 + 1^2 - 2x\cos(90° - 2$
$x = \frac{1}{2\sin 2\theta}$ -- (1)		
在 ΔOAY 上，$\frac{y}{\sin\theta} = \frac{x}{\sin(90°+\theta)}$ ---------------------------- (2)	1M	
把(1)代入(2)：$\frac{y}{\sin\theta} = \frac{1}{2\sin 2\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$	1M	
另解 在 ΔOAY 上，$\frac{y}{\sin\theta} = \frac{OY}{\sin\angle OAY}$	1M	
在 ΔOBY 上，$\frac{1-y}{\sin 3\theta} = \frac{OY}{\sin\angle OBY}$	1M	
$\because\ \angle OAY = \angle OBY$（等腰三角形底角）		
$\therefore\ \frac{y}{\sin\theta} = \frac{1-y}{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}$	1M	
$3y - 4y\sin^2\theta = 1 - y$		
$4y(1-\sin^2\theta) = 1$		
$y = \frac{1}{4}\sec^2\theta$	1	
(b) $\because\ 0° < 4\theta < 180°$	1M	接受使用“≤”符號
$\therefore\ 0° < \theta < 45°$		
$\frac{1}{4}\sec^2 0° < y < \frac{1}{4}\sec^2 45°$ 因對 $0° < \theta < 45°$，$\sec^2\theta$ 是遞增函數		
即 $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$	1A	
	(6)	

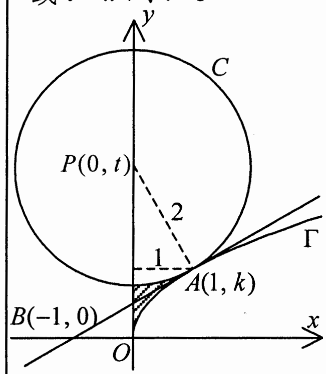
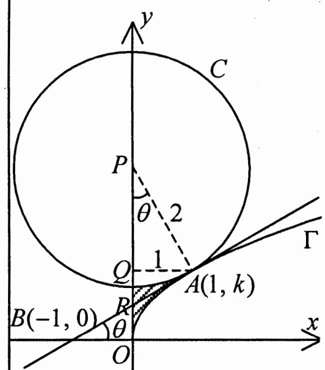
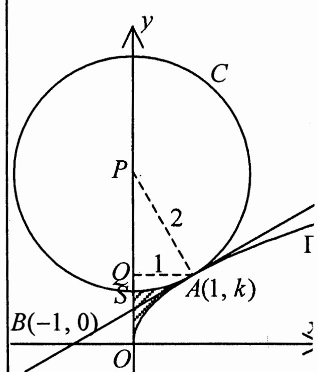
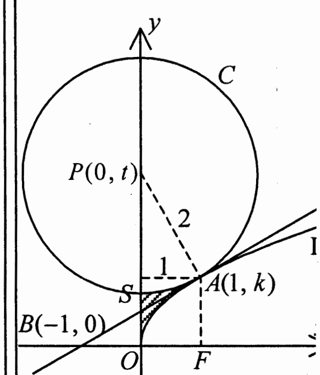
Solution	Marks	Remarks
11. (a) $\begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$		
$(1-x)(3-x)-2\cdot 4=0$	1M	
$x^2-4x-5=0$		
$x=-1$ 或 5	1A	
	(2)	
(b) (i) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$		
$\begin{cases} a+4b=-a \\ 2a+3b=-b \end{cases}$	1M	
$a+2b=0$ -- (1)	1A	
$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$		任何一式
$\begin{cases} c+4=5c \\ 2c+3=5 \end{cases}$		任何一式
$c=1$ -- (2)		
$\begin{vmatrix} a & c \\ b & 1 \end{vmatrix} = 1$		
根據(2)，$a-b=1$ -- (3)	1M	給 $a-bc=1$
解(1)和(3)，得 $a=\dfrac{2}{3}$ 和 $b=\dfrac{-1}{3}$ 。		
$\therefore\ P=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & 1 \\ \dfrac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}$	1A	
(ii) $P^{-1}=\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{3} \\ -1 & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}^t$		
$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$	1M	
$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & 1 \\ \dfrac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}$		
$=\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{5} & 1 \\ \dfrac{5}{3} & \dfrac{10}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & 1 \\ \dfrac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}$	1M	或 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{-2}{3} & 5 \\ \dfrac{1}{3} & 5 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	1A	

Solution	Marks	Remarks
(iii) $P^{-1}\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}P^{-1}$	1M	
$\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}^{12}=\underbrace{P\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}P^{-1}\cdots P\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}P^{-1}}_{\text{自乘 12 次}}$		
$=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}^{12}P^{-1}$	1M	
$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1\\\frac{-1}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5^{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$	1M	給 $\begin{pmatrix}1&0\\0&5^{12}\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&5^{12}\\\frac{-1}{3}&5^{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$		或 $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1\\\frac{-1}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\\frac{5^{12}}{3}&\frac{2\cdot5^{12}}{3}\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}\frac{5^{12}+2}{3}&\frac{2\cdot5^{12}-2}{3}\\\frac{5^{12}-1}{3}&\frac{2\cdot5^{12}+1}{3}\end{pmatrix}$	1A	或 $\begin{pmatrix}81380209&162760416\\81380208&162760417\end{pmatrix}$
	(11)	
12. (a) 設 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AD}}{1+\lambda}$。 由於 $\overrightarrow{AG}$ 位於一中線上，$\overrightarrow{AG}=k\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}=k\dfrac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}}{2}$ 對某個 k 成立。 比較 $\overrightarrow{AG}$ 的兩個表達式，可得 $\lambda=2$。		
$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}}{3}$	1A	
$=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{3}$		
$=\dfrac{(\mathbf{c}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}-\mathbf{a})}{3}$	1M	給頭尾銜接法
<u>另解 1</u> 設 M 為 BC 上的中點。		
$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$	1A	
$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}$		
$=\dfrac{(\mathbf{c}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}-\mathbf{a})}{3}$	1M	給頭尾銜接法
<u>另解 2</u> $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}$	1M	
$=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}-\mathbf{a}$	1A	給 $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$
$=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\mathbf{a}}{3}$	1A	
	(3)	

Solution	Marks	Remarks
(b) (i) 由於 O 是 ΔABC 的外心，$OD\perp AB$。		
$\therefore\ OD//CE$	1	
$\angle DOG=\angle CFG$ （錯角，$OD//CF$）		
$\angle ODG=\angle FCG$ （錯角，$OD//CF$）		
$\angle OGD=\angle FGC$ （對頂角）		
$\therefore\ \Delta DOG\sim\Delta CFG$ (A.A.A.)	1	
$FG:GO=CG:GD$ （相似三角形對應邊）		
$=2:1$	1A	
(ii) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AO}}{3}$	1M	給使用(b)(i)
$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AO}$		
$=3\cdot\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\mathbf{a}}{3}-2(-\mathbf{a})$	1M	給使用(a)
另解 1		
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GF}$		
$=\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{OG}$	1M	給使用(b)(i)
$=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\mathbf{a}}{3}+2\cdot\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$	1M	給使用(a)
另解 2		
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$		
$=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{OD}$	1M	
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$	1M	
$=(\mathbf{c}-\mathbf{a})+\mathbf{a}+\mathbf{b}$		
另解 3		
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}$		
$=3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}$	1M	給使用(b)(i)
$=3\cdot\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}-\mathbf{a}$	1M	
$=\mathbf{b}+\mathbf{c}$	1	
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})$	1M	
$=\lvert\mathbf{c}\rvert^2-\lvert\mathbf{b}\rvert^2$		
$=0$ （$\because$ O 是外心）	1A	
$\therefore\ AF\perp BC$		
$\therefore\ AF$ 是 ΔABC 的另一條高。		
另解		
$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{AC}$	1M	
$=(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$		
$=\lvert\mathbf{c}\rvert^2-\lvert\mathbf{a}\rvert^2$		
$=0$ （$\because$ O 是外心）	1A	
$\therefore\ BF\perp AC$		
$\therefore\ BF$ 是 ΔABC 的另一條高。		
$\therefore\ F$ 是 ΔABC 的垂心。	1	
	(9)	

Solution	Marks	Remarks
13. (a) (i) $\tan u=\dfrac{-1+\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}$		
$=\dfrac{-1+1-2\sin^2\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}$	1M	
$=-\tan\frac{\pi}{5}$		
$=\tan\frac{-\pi}{5}$		
$\therefore\ u=\frac{-\pi}{5}$，其中 $\frac{-\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$	1	
(ii) $\tan v=\dfrac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}$		
$=\dfrac{1+2\cos^2\frac{\pi}{5}-1}{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}$	1M	
$=\cot\frac{\pi}{5}$		
$=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$		
$\therefore\ v=\frac{3\pi}{10}$，其中 $\frac{-\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$	1A	
	(4)	
(b) (i) $x^2+2x\cos\frac{2\pi}{5}+1$		
$x^2+2x\cos\frac{2\pi}{5}+\cos^2\frac{2\pi}{5}+\sin^2\frac{2\pi}{5}$		
$=(x+\cos\frac{2\pi}{5})^2+\sin^2\frac{2\pi}{5}$	1A	
(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{x^2+2x\cos\frac{2\pi}{5}+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{(x+\cos\frac{2\pi}{5})^2+\sin^2\frac{2\pi}{5}}\mathrm{d}x$		
設 $x+\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}\tan\theta$	1M	
$\therefore\ \mathrm{d}x=\sin\frac{2\pi}{5}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$	1A	
當 $x=-1$ $\tan\theta=\dfrac{-1+\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}$，由此得 $\theta=\frac{-\pi}{5}$ （根據(a)(i)）	1M	給使用(a)
當 $x=1$，$\tan\theta=\dfrac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}$，由此得 $\theta=\frac{3\pi}{10}$ （根據(a)(ii)）		

Solution	Marks	Remarks
$\therefore \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{x^2+2x\cos\frac{2\pi}{5}+1}\,dx = \int_{\frac{-\pi}{5}}^{\frac{3\pi}{10}} \frac{\sin^2\frac{2\pi}{5}\sec^2\theta}{\sin^2\frac{2\pi}{5}(\tan^2\theta+1)}\,d\theta$	1A	給被積函數
$=[\theta]_{\frac{-\pi}{5}}^{\frac{3\pi}{10}}$		
$=\dfrac{\pi}{2}$	1A	
	(6)	
(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin\frac{7\pi}{5}}{x^2+2x\cos\frac{7\pi}{5}+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{-\sin\frac{2\pi}{5}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{5}+1}\,dx$	1A	
設 $y=-x$。	1M	
$dy=-dx$		
當 $x=-1$，$y=1$；當 $x=1$，$y=-1$。		
$\therefore \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin\frac{7\pi}{5}}{x^2+2x\cos\frac{7\pi}{5}+1}\,dx = \int_{1}^{-1} \frac{-\sin\frac{2\pi}{5}}{y^2+2y\cos\frac{2\pi}{5}+1}\cdot -dy$		
另解		
$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin\frac{7\pi}{5}}{x^2+2x\cos\frac{7\pi}{5}+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sin\frac{7\pi}{5}}{(x+\cos\frac{7\pi}{5})^2+\sin^2\frac{7\pi}{5}}\,dx$		
設 $x+\cos\frac{7\pi}{5}=\sin\frac{7\pi}{5}\tan\theta$	1M	
$\therefore\ dx=\sin\frac{7\pi}{5}\sec^2\theta\,d\theta$		
當 $x=-1$，$\theta=\frac{3\pi}{10}$；當 $x=1$，$\theta=\frac{-\pi}{5}$。	1A	
$\therefore \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin\frac{7\pi}{5}}{x^2+2x\cos\frac{7\pi}{5}+1}\,dx = \int_{\frac{3\pi}{10}}^{\frac{-\pi}{5}} \frac{\sin^2\frac{7\pi}{5}\sec^2\theta}{\sin^2\frac{7\pi}{5}(\tan^2\theta+1)}\,d\theta$		
$=\dfrac{-\pi}{2}$ 根據(b)(ii)	1A	
	(3)	
14. (a) $y=kx^p$		
$\dfrac{dy}{dx}=kpx^{p-1}$	1A	
Γ 於 A 的切線的斜率為 kpa^{p-1}。		
$\therefore\ \dfrac{ka^p-0}{a-(-a)}=kpa^{p-1}$	1M	
$p=\dfrac{1}{2}$	1	
	(3)	

Solution	Marks	Remarks
(b) (i) 設 $P(0,t)$ 爲 C 的圓心。		
$\because\ AP=2$		
$\therefore\ (k-t)^2+(1-0)^2=2^2$	1M	或 $t=k+\sqrt{4-1}$
$k-t=-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ （捨去） -------------------------------- (1)		
AP 的斜率 $=\dfrac{k-t}{1-0}$		
AB 的斜率 $=\dfrac{k}{2}$ （根據(a)）	1M	
$\therefore\ (k-t)\dfrac{k}{2}=-1$ -- (2)	1A	
把(1)代入(2)：$(-\sqrt{3})\dfrac{k}{2}=-1$		
另解		
根據附圖，$\angle ROB=\angle RAP=\dfrac{\pi}{2}$ 。		
$\angle ORB=\angle ARP$ （對頂角）		
$\therefore\ \angle RBO=\angle RPA$，並設該角度爲 θ 。	1M	
由於 $PA=2$ 和 $QA=1$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$	1A	
AB的斜率 $=\dfrac{k}{2}$ （根據(a)）	1M	
$\therefore\ \tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{k}{2}$		
$k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	1	
(ii) 陰影區域的面積		
$=\Delta PQA$ 的面積 + Γ左方由 O 到 A 的面積 − 扇形 PAS 的面積	1M	
$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{4-1}+\displaystyle\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\left(\dfrac{y}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)^2 dy-\dfrac{1}{2}(2)^2\dfrac{\pi}{6}$	1M+1A	
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}-\dfrac{\pi}{3}$	1M	
另解 1		
$t=k+\sqrt{3}$		
$=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$		
陰影區域的面積		
= 梯形 $OFAP$ 的面積 − 扇形 PAS 的面積 − Γ下方由 O 到 A 的面積	1M	
$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)(1)-\dfrac{1}{2}(2)^2\dfrac{\pi}{6}-\displaystyle\int_0^1\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{1}{2}}dx$	1M+1A	
$=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$	1M	

Solution	Marks	Remarks

另解 2

$t = k + \sqrt{3}$

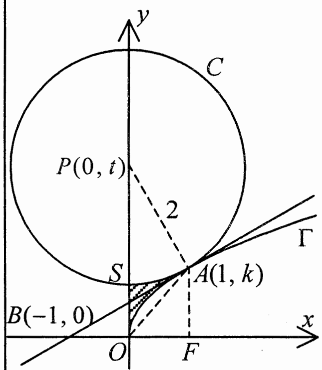
$\quad = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

陰影區域的面積

$= \Delta OAP$ 的面積 $+\ \Delta OAF$ 的面積 $-$ 扇形 PAS 的面積 $-\ \Gamma$ 下方由 O 到 A 的面積 — 1M

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)(1) + \dfrac{1}{2}(1)\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) - \dfrac{1}{2}(2)^2\dfrac{\pi}{6} - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{1}{2}}\,dx$ — 1M+1A

$= \dfrac{5\sqrt{3}}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$ — 1M



另解 3

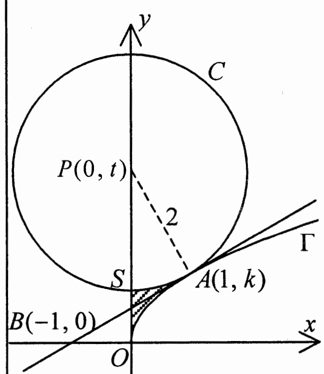
$t = k + \sqrt{3}$

$\quad = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

C 的方程爲 $x^2 + \left(y - \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4$ 。 — 1A

因此 $\widehat{AS}$ 的方程爲 $y = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} - \sqrt{4-x^2}$ 。

陰影區域的面積 $= \displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3} - \sqrt{4-x^2} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ — 1M — 給 $A = \int y\,dx$



爲計算 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ ，設 $x = 2\sin\phi$ 。

$\therefore\ dx = 2\cos\phi\, d\phi$

當 $x=1$ ， $\phi = \dfrac{\pi}{6}$ ；當 $x=0$ ， $\phi = 0$ 。

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2\phi}\; 2\cos\phi\, d\phi$ — 1M

$\quad = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(1+\cos 2\phi)\, d\phi$

$\quad = [2\phi + \sin 2\phi]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$\quad = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

因此陰影區域的面積

$= \left[\dfrac{5\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{4\sqrt{3}}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — 1M

$= \dfrac{13\sqrt{3}}{18} - \dfrac{\pi}{3}$ — 1A

(9)