

數學 延伸部分 單元二（代數與微積分）

試題答題簿

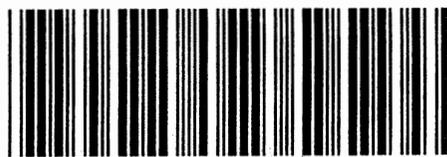
本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

1. 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11、13 及 15 頁之適當位置貼上電腦條碼。
2. 試卷內各題均須作答。答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
3. 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每一紙張均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於簿內。
4. 除特別指明外，所有算式須詳細列出。
5. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值表示。
6. 試題雖用黑體字母如 \mathbf{u} 表示向量，惟考生答題時應採用適當符號如 \vec{u} 。
7. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
8. 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

甲部 (50分)

1. 在 $(1-4x)^2(1+x)^n$ 的展式中， x 的係數是 1。

- (a) 求 n 的值。
- (b) 求 x^2 的係數。

(4分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

2. 考慮曲線 $C: y = x^3 - 3x$ 。

(a) 從基本原理求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(b) 求當 C 遞減時 x 的取值範圍。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 求曲線 $x \ln y + y = 2$ 於該曲線與 y 軸交點的切線方程。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

4. 設 $x = 2y + \sin y$ 。求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ，答案以 y 表示。

(3分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. (a) 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$ ，其中 $x < 9$ 。

(b) 利用代換積分法，求 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ ，其中 $-3 < x < 3$ 。

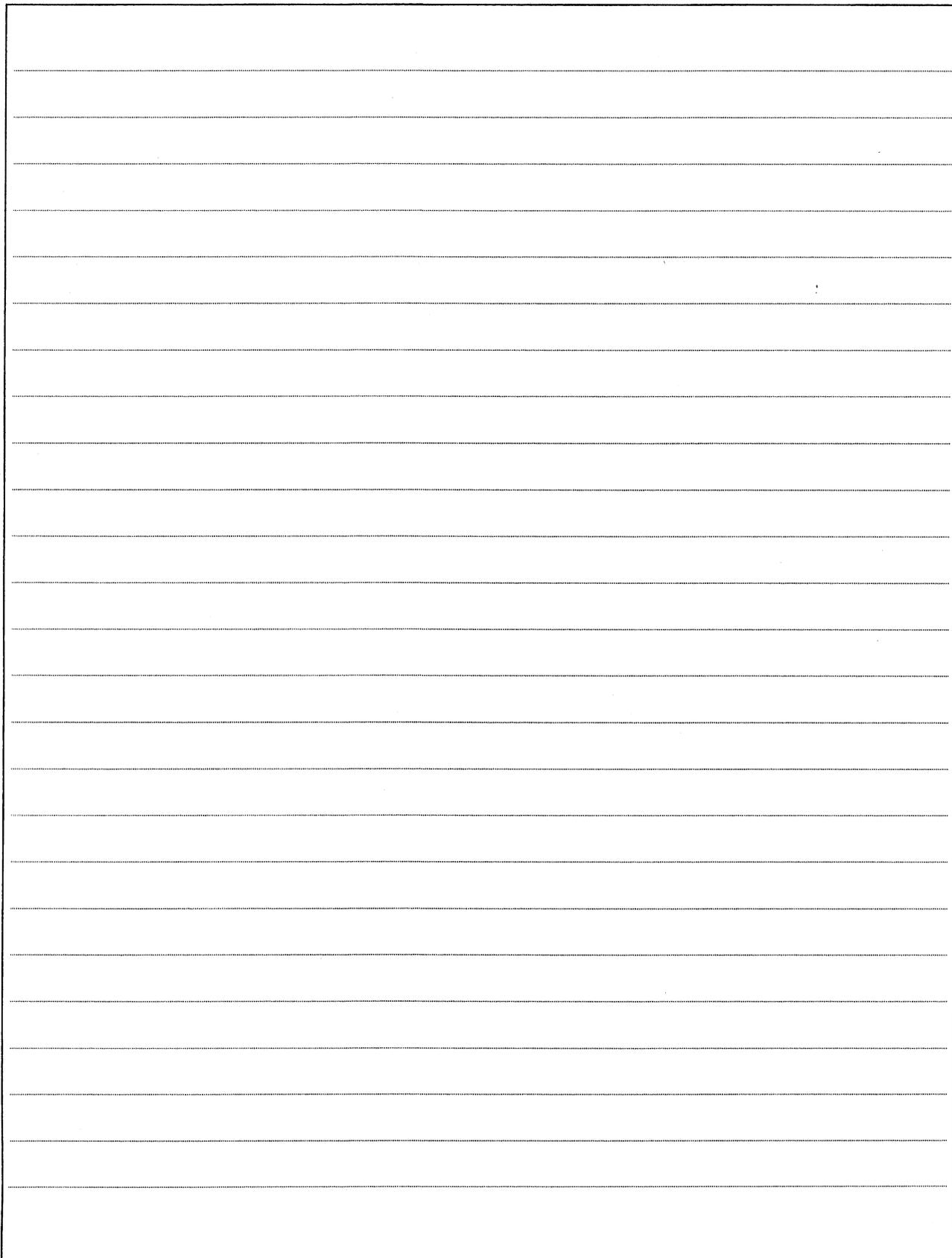
(6分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. (a) 求 $\int xe^{-x} dx$ 。

(b)

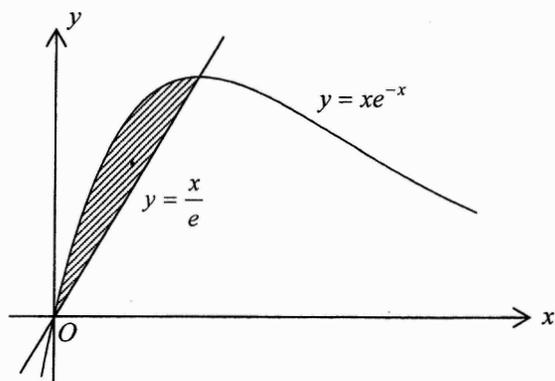


圖 1

圖 1 顯示由曲線 $y = xe^{-x}$ 和直線 $y = \frac{x}{e}$ 圍成的陰影區域。求陰影區域的面積。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin on both sides.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7. 設 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(a) 以數學歸納法證明對所有正整數 n ， $A^{n+1} = 2^n A$ 。

(b) 偉儀利用(a)的結果進行以下推導：

$$\begin{array}{l} A^2 = 2A \\ A^2 A^{-1} = 2AA^{-1} \\ A = 2I \end{array}$$

解釋為何偉儀得出錯誤的結論。

(7分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

A large rectangular area with horizontal lines for writing answers. The lines are evenly spaced and cover most of the page's width and height.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 設 $\vec{OP} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 、 $\vec{OQ} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 和 $\vec{OR} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 。

(a) 求 $\vec{OP} \times \vec{OQ}$ 。

由此求四面體 $OPQR$ 的體積。

(b) 求平面 OPQ 與直線 OR 之間的銳角，準確至最接近的 0.1° 。

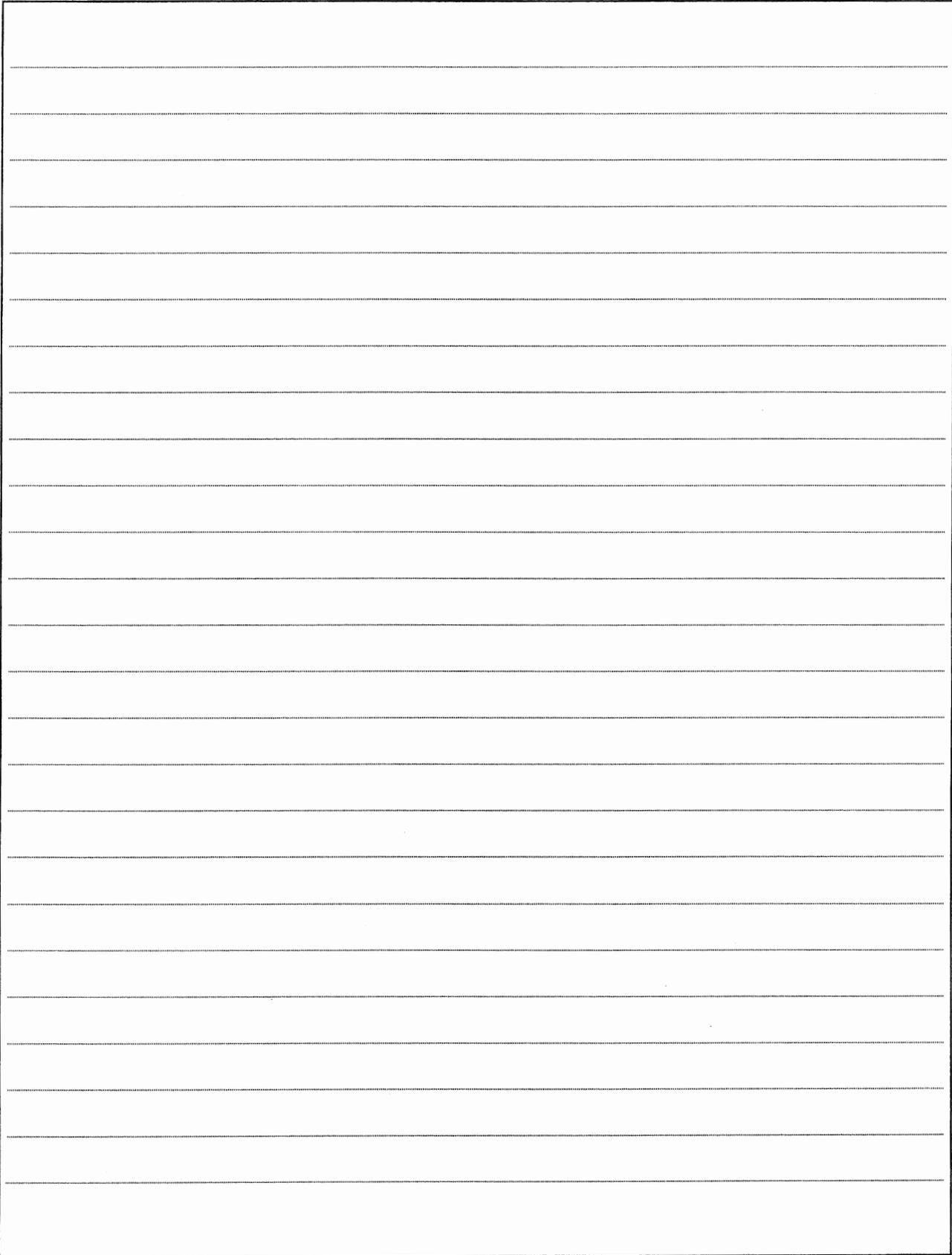
(8分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. (a) 解線性方程組
$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x + 6y + 10z = 200 \end{cases}。$$

- (b) 在某店鋪內，小、中、大三款彈珠每顆的價錢分別為 \$0.5、\$3 和 \$5。夢華計劃用盡 \$100 購買恰好 100 顆彈珠，當中包括 m 顆小彈珠、 n 顆中彈珠和 k 顆大彈珠。夢華聲稱只有一套 $m、n$ 和 k 的組合。你是否同意？解釋你的答案。

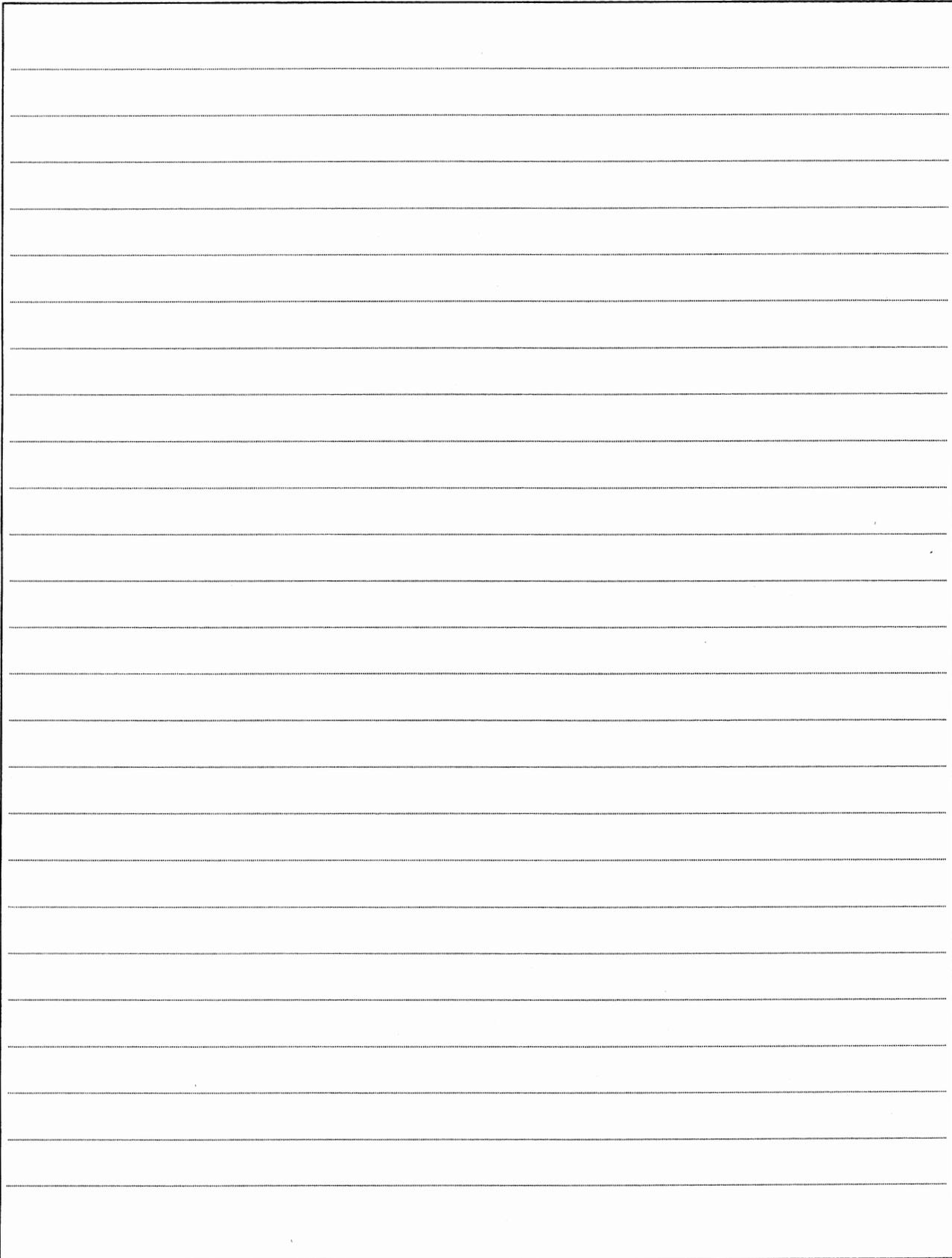
(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50分)

10.

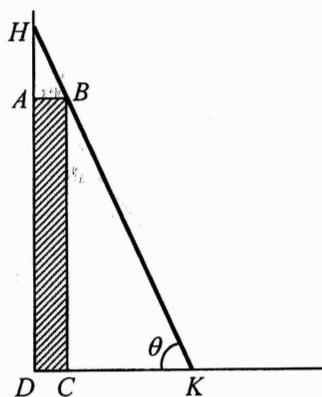


圖 2

智朗房間某角落有一個書架，其尺寸為 $100\text{ cm} \times 24\text{ cm} \times 192\text{ cm}$ 。他想要在書架上方的牆壁上掛一個裝飾品，因此他取了一把梯子以便爬上去。起初梯子同時與牆壁、書架的頂邊和地板接觸。設長方形 $ABCD$ 為書架的側面， HK 為梯子的側邊，並且 $AB = 24\text{ cm}$ 和 $BC = 192\text{ cm}$ (見圖 2)。設 $\angle HKD = \theta$ 。

(a) 求 HK 的長度，答案以 θ 表示。 (1分)

(b) 證明梯子的最短長度為 $120\sqrt{5}\text{ cm}$ 。 (5分)

(c)

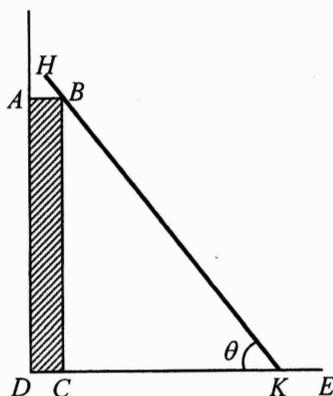


圖 3

假設梯子的長度為 270 cm 。梯子突然滑下，導致梯子的一端 K 移向 E (見圖 3)。梯子同時與書架的頂邊和地板接觸。設 $x\text{ cm}$ 和 $y\text{ cm}$ 分別為 H 和 K 與牆壁的水平距離。

(i) 當 $CK = 160\text{ cm}$ 時， θ 的變率為 -0.1 rad s^{-1} 。求 x 於此刻的變率，準確至 4 位有效數字。

(ii) 智朗聲稱 K 移向 E 的速率較 H 離開牆壁的水平速率快。你是否同意？解釋你的答案。 (6分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal ruling lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin at the top and bottom.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11.

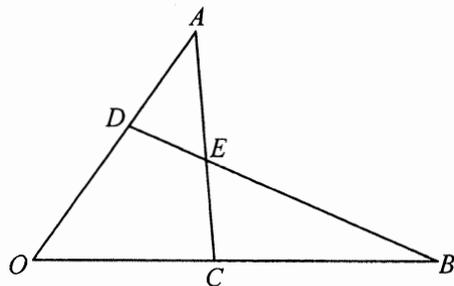


圖 4

在圖 4 中， C 和 D 分別為 OB 和 OA 上的點，使得 $AD:DO=OC:CB=t:1-t$ ，其中 $0 < t < 1$ 。
 BD 和 AC 相交於 E ，使得 $AE:EC=m:1$ 和 $BE:ED=n:1$ ，其中 m 和 n 為正數。設 $\vec{OA}=\mathbf{a}$ 和 $\vec{OB}=\mathbf{b}$ 。

(a) (i) 通過考慮 $\triangle OAC$ ，以 m 、 t 、 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表 \vec{OE} 。

(ii) 通過考慮 $\triangle OBD$ ，以 n 、 t 、 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表 \vec{OE} 。

(iii) 證明 $m = \frac{t}{(1-t)^2}$ 和 $n = \frac{1-t}{t^2}$ 。

(iv) 啓寧聲稱：

「若 $m=n$ ，則 E 是 $\triangle OAB$ 的形心」。

你是否同意？解釋你的答案。

(9 分)

(b) 已知 $OA=1$ 和 $OB=2$ 。少君聲稱：

「若 AC 與 OB 垂直，則 BD 總與 OA 垂直」。

你是否同意？解釋你的答案。

(4 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dashed lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dashed lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 設 $M = \begin{pmatrix} k-1 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，其中 k 和 p 為實數，且 $p \neq -1$ 。

(a) (i) 求 A^{-1} ，答案以 p 表示。

(ii) 證明 $A^{-1}MA = \begin{pmatrix} -1 & k-p \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 。

(iii) 假設 $p = k$ 。利用(ii)求 M^n ，答案以 k 和 n 表示，其中 n 為正整數。

(8分)

(b) 定義一數列為

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \quad \text{和} \quad x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \quad \text{對} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

已知此數列可以表示為矩陣形式 $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$ 。

利用(a)(iii)的結果，以 n 表 x_n 。

(3分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dotted lines for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin on both sides.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dotted lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dotted lines for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin on the left and right sides.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. (a) 證明 $1 - \cos 4\theta - 2 \cos 2\theta \sin^2 2\theta = 16 \cos^2 \theta \sin^4 \theta$ 。
(2分)

(b) 證明 $\int_0^{n\pi} \cos^2 x \sin^4 x \, dx = \frac{n\pi}{16}$ ，其中 n 為正整數。
(4分)

(c) 設 $f(x)$ 為連續函數，使得 $f(k-x) = f(x)$ ，其中 k 為常數。
證明 $\int_0^k xf(x) \, dx = \frac{k}{2} \int_0^k f(x) \, dx$ 。
(4分)

(d)

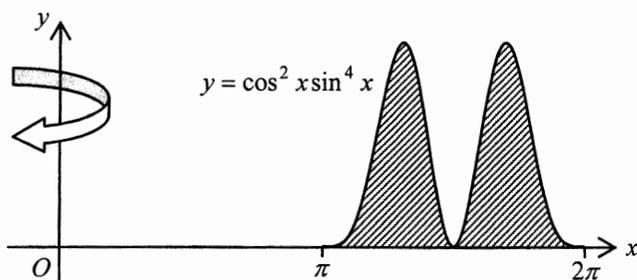


圖 5

圖 5 顯示由曲線 $y = \cos^2 x \sin^4 x$ 和 x 軸圍成的陰影區域，其中 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 。求把陰影區域繞 y 軸旋轉所得旋轉體的體積。

(4分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dotted lines for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin at the top and bottom.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal ruling lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin at the top and bottom.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal ruling lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin on the left and right sides.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

試卷完

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。