評卷參考

單元二（代數與微積分）

本文件供閱卷員參考而設，並不應被視為標準答案。考生以及沒有參與評卷工作的教師在詮釋文件內容時應小心謹慎。

一般閱卷原則

1. 評卷時，閱卷員須跟循評卷參考的評分標準給分，這是十分重要的。很多時考生會運用評卷參考以外的方法而得到正確答案，一般來說，只要運用合理的方法而取得正確答案，該考生應可獲得該部分的**所有分數**（除題目特別指明特定方法外）。閱卷員應有耐性地評閱評卷參考以外的解題方法。

2. 在評卷參考中，分數會分為下列三類：

   「M」分　　使用正確方法的得分；
   「A」分　　正確答案的得分；
   沒有「M」或「A」的分　　正確地完成證題或推演得題目所給的答案的得分。

   某些題目由數部分組成，而較後部分的答案卻需依賴較前部分所得的結果。在這情況下，若考生因為前部分錯誤的結果而導致後部分的答案錯誤，但卻能運用正確的方法去解題，則方法正確的步驟可給「M」分，而相應的答案將沒有「A」分（除特別指明外）。

3. 為方便閱卷員評卷，評卷參考已盡量詳盡。當然，考生的答案多不會如評卷參考般清楚列寫出來，諸如欠缺某幾個步驟或將步驟隱含於字裏行間。如遇到類似情況，閱卷員應運用他們的專業知識去判斷是否給分。一般來說，如考生的答案顯示他已運用相關的概念或技巧，則該部分應予給分。

4. 評卷時遇有不清楚的地方，應以考生的利益為依歸。

5. 評卷參考中，塗上陰影的部分代表可省略的步驟，有外框的部分代表運用不同方法的答案。所有分數答案必須化簡。

6. 除在題目中特別指明外，不以真確值表示的數值答案均不被接受。

解	分	備註
1. $(5+x)^4$		
$=5^4+4(5^3)x+6(5^2)x^2+4(5)x^3+x^4$	1M	
$=625+500x+150x^2+20x^3+x^4$	1A	
$\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^3$		
$=1-3\left(\dfrac{2}{x}\right)+3\left(\dfrac{2}{x}\right)^2-\left(\dfrac{2}{x}\right)^3$	1M	
$=1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}$		
常數項		
$=(625)(1)+(500)(-6)+(150)(12)+(20)(-8)$	1M	保留不給 1M 若遺漏步驟
$=-735$	1A	
	----------(5)	
2. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}$		
$=\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+h)}}$		
$=\left(\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+h)}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$	1M	
$=\dfrac{x+h-x}{(x+h)\sqrt{x}+x\sqrt{x+h}}$		
$=\dfrac{h}{(x+h)\sqrt{x}+x\sqrt{x+h}}$	1	
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\dfrac{3}{x}}$		
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right)$	1M	
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{-h\sqrt{3}}{(x+h)\sqrt{x}+x\sqrt{x+h}}\right)$		
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-\sqrt{3}}{(x+h)\sqrt{x}+x\sqrt{x+h}}$	1M	保留不給 1M 若遺漏步驟
$=\dfrac{-\sqrt{3}}{2x\sqrt{x}}$	1A	
	----------(5)	

解	分	備註
3. (a) 留意 Q 的坐標為 $(0,2e^u)$ ，其中 $u>0$ 。 ΔOPQ 的面積 $=\dfrac{u(2e^u)}{2}$ $=ue^u$	1A	
(b) 設 v 為 P 的 y 坐標。 由於 $v=2e^u$ ，可得 $\dfrac{dv}{dt}=2e^u\dfrac{du}{dt}$ 。	1M	
所以，可得 $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{2e^u}\left(\dfrac{dv}{dt}\right)$ 。 設 A 平方單位為 ΔOPQ 的面積。 藉 (a)，可得 $A=ue^u$ 。 $\dfrac{dA}{dt}$		
$=(e^u+ue^u)\dfrac{du}{dt}$	1M+1M	
$=\left(\dfrac{e^u+ue^u}{2e^u}\right)\dfrac{dv}{dt}$ $=\left(\dfrac{1+u}{2}\right)\dfrac{dv}{dt}$		
故此，可得 $\left.\dfrac{dA}{dt}\right\rvert_{u=4}=\left(\dfrac{1+4}{2}\right)(6)=15$ 。	1A	
因此，所求的變率為每秒 15 平方單位。		
設 v 為 P 的 y 坐標。 由於 $v=2e^u$ ，可得 $u=\ln\left(\dfrac{v}{2}\right)$ 。	1M	
設 A 平方單位為 ΔOPQ 的面積。 藉 (a)，可得 $A=\dfrac{v}{2}\ln\left(\dfrac{v}{2}\right)$ 。 $\dfrac{dA}{dt}$		
$=\left(\left(\dfrac{v}{2}\right)\left(\dfrac{2}{v}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{v}{2}\right)\right)\dfrac{dv}{dt}$	1M+1M	
$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{v}{2}\right)\right)\dfrac{dv}{dt}$ 當 $u=4$ 時，可得 $v=2e^4$ 。 $\left.\dfrac{dA}{dt}\right\rvert_{u=4}$ $=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2e^4}{2}\right)\right)(6)$		
$=15$	1A	
因此，所求的變率為每秒 15 平方單位。		
	----------(5)	

解	分	備註
4. (a) 留意垂直漸近線的方程為 $x=1$ 。	1A	
$f(x)$ $=\dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$		
$=2x+3+\dfrac{4}{x-1}$	1M	
因此，斜漸近線的方程為 $y=2x+3$ 。	1A	
(b) $f'(x)$ $=\dfrac{(x-1)(4x+1)-(2x^2+x+1)}{(x-1)^2}$	1M	
$=\dfrac{2(x^2-2x-1)}{(x-1)^2}$		
$f'(2)$ $=\dfrac{2(2^2-2(2)-1)}{(2-1)^2}$ $=-2$	1M	
G 在點 $(2,11)$ 的法線的斜率 $=\dfrac{-1}{f'(2)}$	1M	
$=\dfrac{1}{2}$	1A	
$f'(x)$ $=\dfrac{d}{dx}\left(2x+3+\dfrac{4}{x-1}\right)$ $=2-\dfrac{4}{(x-1)^2}$	1M	
$f'(2)$ $=2-\dfrac{4}{(2-1)^2}$ $=-2$	1M	
G 在點 $(2,11)$ 的法線的斜率 $=\dfrac{-1}{f'(2)}$	1M	
$=\dfrac{1}{2}$	1A	
	-----------(7)	

解	分	備註
5. (a) 留意 $(-1)^1(1^2)=-1=\frac{(-1)^1(1)(2)}{2}$ 。		
故此，對 $n=1$ ， 命題為真。	1	
假設對某些正整數 m ， $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k^2=\frac{(-1)^m m(m+1)}{2}$ 。	1M	
$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k k^2$		
$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k^2+(-1)^{m+1}(m+1)^2$		
$=\frac{(-1)^m m(m+1)}{2}+(-1)^{m+1}(m+1)^2$ （藉歸納法假設）	1M	給利用歸納法假設
$=\frac{(-1)^m m(m+1)+(-1)^{m+1}(m+1)(2m+2)}{2}$		
$=\frac{(-1)^m (m+1)(m-2m-2)}{2}$		
$=\frac{(-1)^{m+1}(m+1)(m+2)}{2}$		
故此，若對 $n=m$ ， 命題為真，則對 $n=m+1$ ， 命題為真。藉數學歸納法，對所有正整數 n， 命題為真。	1	
(b) 把 $n=333$ 代入 (a)，可得 $\sum_{k=1}^{333}(-1)^k k^2=\frac{(-1)^{333}(333)(334)}{2}$ 。	1M	
故此，可得 $-1+4+\sum_{k=3}^{333}(-1)^k k^2=\frac{(-1)^{333}(333)(334)}{2}$ 。		
因此，可得 $\sum_{k=3}^{333}(-1)^{k+1} k^2=55\,614$ 。	1A	
	----------(6)	

解	分	備註
6. (a) 留意 $4(-1)^3+2(-1)^2-3(-1)-1=-4+2+3-1=0$ 。		
因此， $x+1$ 為 $4x^3+2x^2-3x-1$ 的因式。	1	
(b) $\cos 3\theta$		
$=\cos(\theta+2\theta)$		
$=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta$	1M	
$=\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-\sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$		
$=\cos\theta(\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta))-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$		
$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$	1A	
(c) 留意 $\theta=\dfrac{3\pi}{5}$ 滿足 $\cos 3\theta=\cos(3\pi-2\theta)$ 。	1M	
所以， $\theta=\dfrac{3\pi}{5}$ 滿足 $\cos 3\theta=-\cos 2\theta$ 。		
藉 (b)， $\theta=\dfrac{3\pi}{5}$ 滿足 $4\cos^3\theta-3\cos\theta=-(2\cos^2\theta-1)$ 。	1M	給利用 (b)
由此， $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ 為方程 $4x^3+2x^2-3x-1=0$ 的根。		
藉 (a)，可得 $4x^3+2x^2-3x-1=(x+1)(4x^2-2x-1)$ 。		
故此，可得 $4x^3+2x^2-3x-1=4(x+1)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$ 。		
由於 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3\pi}{5}<\pi$ ，可得 $-1<\cos\dfrac{3\pi}{5}<0$ 。		
因此，可得 $\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ 。	1	
	----------(6)	

解	分	備註
7. (a) 設 $u=\sqrt{t+1}$ 。	1M	
故此，可得 $2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=1$ 。		
$\int(1+\sqrt{t+1})^2\,\mathrm{d}t$		
$=\int(1+u)^2\,2u\mathrm{d}u$		
$=\int(2u+4u^2+2u^3)\,\mathrm{d}u$	1M	
$=u^2+\frac{4}{3}u^3+\frac{1}{2}u^4+$ 常數		
$=(t+1)+\frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(t+1)^2+$ 常數	1A	
$=2t+\frac{t^2}{2}+\frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}+$ 常數		
$\int(1+\sqrt{t+1})^2\,\mathrm{d}t$		
$=\int(1+2\sqrt{t+1}+t+1)\,\mathrm{d}t$		
$=\int(2+t+2\sqrt{t+1})\,\mathrm{d}t$	1M	
$=2t+\frac{t^2}{2}+\int 2\sqrt{t+1}\,\mathrm{d}t$		
$=2t+\frac{t^2}{2}+\int 2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$ （藉設 $u=t+1$ ）	1M	
$=2t+\frac{t^2}{2}+\frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}+$ 常數	1A	
(b) 留意 $y=4x^2-4x$ ，其中 $1\le x\le 4$ 。		
故此，可得 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{y+1})$ 。	1M	
所求的體積		
$=\int_0^{48}\pi\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{y+1})\right)^2\mathrm{d}y$	1M	
$=\frac{\pi}{4}\int_0^{48}(1+\sqrt{y+1})^2\,\mathrm{d}y$		
$=\frac{\pi}{4}\int_0^{48}(1+\sqrt{t+1})^2\,\mathrm{d}t$	1M	
$=\frac{\pi}{4}\left[2t+\frac{t^2}{2}+\frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{48}$ （藉 (a)）	1M	給利用 (a)
$=426\pi$	1A	
	----------(8)	

解	分	備註
8. (a) (i) A $=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$		
A^2 $=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$	1A	
(ii) A^3 $=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	1M	
$=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$		
A^n $=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$	1A	
(iii) $\det(A^n)$ $=\begin{vmatrix}1&0\\n&1\end{vmatrix}$ $=1$		
$(A^{-1})^n$ $=(A^n)^{-1}$		
$=\dfrac{1}{\det(A^n)}\begin{pmatrix}1&0\\-n&1\end{pmatrix}$	1M	
$=\begin{pmatrix}1&0\\-n&1\end{pmatrix}$	1A	
$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$		
$(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$		
$(A^{-1})^3=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}$	1M	
因此，可得 $(A^{-1})^n=\begin{pmatrix}1&0\\-n&1\end{pmatrix}$。	1A	
	----------(5)	

解	分	備註
(b) (i) $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ $= \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$ $= 2^n - 1$	1A	
(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^0 & 2^1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^0 & 2^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^0 + 2^1 & 2^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^0 + 2^1 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 & 2^3 \end{pmatrix}$	1M	
故此，可得 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} 2^k & 2^n \end{pmatrix}$ 。		
藉 (b)(i)，可得 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}$ 。	1A	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^1 - 1 & 2^1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^1 - 1 & 2^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 - 1 & 2^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^2 - 1 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^3 - 1 & 2^3 \end{pmatrix}$	1M	
因此，可得 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}$ 。	1A	
	----------(3)	

解	分	備註
9. (a) 由於 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ ， 可得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 。	1A	
留意 $P(-1,10)$ 為 C 的轉向點。		
故此，可得 $-1+a-b+5=10$ 及 $3-2a+b=0$ 。	1M	給任何一項
所以，可得 $a-b-6=0$ 及 $-2a+b+3=0$ 。		
求解後，可得 $a=-3$ 及 $b=-9$ 。	1A	給兩項正確
	----------(3)	
(b) 留意 $f''(x)=6x-6$ 。 $f''(-1)$ $=-12$ <0	1M	
因此， P 是 C 的極大點。	1A	必須顯示理由

留意 $f'(x)=3(x+1)(x-3)$ 。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	10	↘

1M

因此， P 是 C 的極大點。 1A 必須顯示理由

----------(2)

解	分	備註
(c) 留意 $f'(x)=3(x+1)(x-3)$ 。		
故此，可得 $f'(3)=0$ 。	1M	
再者留意 $f''(x)=6x-6$ 。 $f''(3)$ $=12$ >0		
又再留意 $f(3)=-22$ 。		
因此， $f(x)$ 的極小值為 -22 。	1A	

留意 $f'(x)=3(x+1)(x-3)$ 。
故此，可得 $f'(3)=0$ 。 1M

x	$(-1,3)$	3	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-22	↗

因此， $f(x)$ 的極小值為 -22 。 1A

----------(2)

(d) 留意 $f''(x)=6(x-1)$ 。
所以，可得當 $x=1$ 時， $f''(x)=0$ 。

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

1M

因此， C 的拐點為 $(1,-6)$ 。 1A

----------(2)

解	分	備註
(e) 留意 L 的方程為 $y=10$ 。		
$x^3-3x^2-9x+5=10$	1M	
$x^3-3x^2-9x-5=0$		
$(x+1)^2(x-5)=0$		
$x=-1$ 或 $x=5$		
所求的面積		
$=\int_{-1}^{5}(10-(x^3-3x^2-9x+5))\,\mathrm{d}x$	1M	
$=\int_{-1}^{5}(-x^3+3x^2+9x+5)\,\mathrm{d}x$		
$=\left[\dfrac{-x^4}{4}+x^3+\dfrac{9x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{5}$	1M	
$=108$	1A	
	----------(4)	

解	分	備註
10. (a) 設 $x=a-y$ 。	1M	
故此，可得 $\frac{dx}{dy}=-1$ 。		
$\int_0^a f(x)\,dx$		
$=-\int_a^0 f(a-y)\,dy$		
$=\int_0^a f(a-y)\,dy$	1M	
$=\int_0^a f(a-x)\,dx$	1	
	----------(3)	
(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$		
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$ （藉 (a) 且 $a=\frac{\pi}{4}>0$ ）	1M	給利用 (a)
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx$	1M	
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx$	1	
	----------(3)	
(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx$ （藉 (b)）		
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2-\ln(1+\tan x))\,dx$	1M	
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$		
$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\ dx$	1M	
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\ dx$		
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx=\frac{\pi\ln 2}{8}$	1	
	----------(3)	
(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx$		
$=\left[x\ln(1+\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$	1M	
$=\left(\frac{\pi\ln 2}{4}-0\right)-\frac{\pi\ln 2}{8}$ （藉 (c)）	1M	給利用 (c)
$=\frac{\pi\ln 2}{8}$	1A	
	----------(3)	

解	分	備註
11. (a) (i) (1) 留意 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & a \\ 5 & 1-a & 3a-1 \end{vmatrix}$ $= 6(3a-1)+(a)(5)+(-1)(4)(1-a)-(a)(1-a)-4(3a-1)-(-1)(6)(5)$	1A	
$=(a+2)(a+12)$		
由於 (E) 有唯一解，可得 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & a \\ 5 & 1-a & 3a-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 。	1M	
故此，可得 $(a+2)(a+12)\neq 0$ 。		
因此，可得 $a\neq -2$ 及 $a\neq -12$ 。	1	
(E) 的增廣矩陣為 $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & a & b \\ 5 & 1-a & 3a-1 & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & a+4 & b-12 \\ 0 & -a-4 & 3a+4 & b-16 \end{array}\right)$	1M	
$\sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & a+4 & b-12 \\ 0 & 0 & (a+2)(a+12) & ab-12a+6b-80 \end{array}\right)$	1A	
由於 (E) 有唯一解，可得 $(a+2)(a+12)\neq 0$ 。		
因此，可得 $a\neq -2$ 及 $a\neq -12$ 。	1	
(2) 由於 (E) 有唯一解，可得		
$x=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ b & 6 & a \\ b-1 & 1-a & 3a-1 \end{vmatrix}}{(a+2)(a+12)}$ $=\dfrac{3a^2-ab+50a+6b-24}{(a+2)(a+12)}$	1M	給克萊瑪法則
$y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & b & a \\ 5 & b-1 & 3a-1 \end{vmatrix}}{(a+2)(a+12)}$ $=\dfrac{2(ab-10a+8)}{(a+2)(a+12)}$		
$z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & b \\ 5 & 1-a & b-1 \end{vmatrix}}{(a+2)(a+12)}$ $=\dfrac{ab-12a+6b-80}{(a+2)(a+12)}$	1A+1A	1A 給任何一項，1A 給所有功

解	分	備註
由於 (E) 有唯一解， (E) 的增廣矩陣		
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & a+4 & b-12 \\ 0 & 0 & (a+2)(a+12) & ab-12a+6b-80 \end{array}\right)$	1M	
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3a^2-ab+50a+6b-24}{(a+2)(a+12)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2(ab-10a+8)}{(a+2)(a+12)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{ab-12a+6b-80}{(a+2)(a+12)} \end{array}\right)$		
因此，可得 $\begin{cases} x=\frac{3a^2-ab+50a+6b-24}{(a+2)(a+12)} \\ y=\frac{2(ab-10a+8)}{(a+2)(a+12)} \\ z=\frac{ab-12a+6b-80}{(a+2)(a+12)} \end{cases}$ 。	1A+1A	1A 給任何一項，1A 給所有項
(ii) (1) 當 $a=-2$ 時， (E) 的增廣矩陣為		
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & b \\ 5 & 3 & -7 & b-1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & b-12 \\ 0 & 0 & 0 & 2b-28 \end{array}\right)$	1M	任何一項
由於 (E) 有解，可得 $b=14$ 。	1A	
(2) 當 $a=-2$ 及 $b=14$ 時， (E) 的增廣矩陣		
$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$		
因此， (E) 的解集為 $\{(2t+2, 1-t, t) : t\in\mathbf{R}\}$ 。	1A	
	----------(9)	
(b) 代入 $a=-2$ 及 $b=14$ ， (E) 變為		
$\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+3y-z=7 \\ 5x+3y-7z=13 \end{cases}$		
藉 (b)(ii)，解集為 $\{(2t+2, 1-t, t) : t\in\mathbf{R}\}$ 。	1M	
故此，可得		
$x^2+y^2-6z^2$		
$=(2t+2)^2+(1-t)^2-6t^2$		
$=-t^2+6t+5$		
$=-(t^2-6t+3^2)+3^2+5$		
$=-(t-3)^2+14$	1M	
所以， $x^2+y^2-6z^2$ 的最大值為 14 。		
因此，該線性方程組沒有實解能滿足 $x^2+y^2-6z^2>14$ 。	1A	必須顯示理由
	----------(3)	

解	分	備註
12. (a) $\lvert\overrightarrow{PA}\rvert=\lvert\overrightarrow{PB}\rvert$		
$\lvert\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\rvert=\lvert\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\rvert$	1M	
$\lvert -\mathbf{i}+(2-t)\mathbf{j}+2\mathbf{k}\rvert=\lvert 3\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+\mathbf{k}\rvert$		
$\sqrt{(-1)^2+(2-t)^2+2^2}=\sqrt{3^2+(1-t)^2+1^2}$	1M	
$t^2-4t+9=t^2-2t+11$		
$t=-1$	1A	
	----------(3)	
(b) (i) $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$		
$=(-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k})$		
$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 3 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}$		
$=-5\mathbf{i}-10\mathbf{j}-10\mathbf{k}$	1M	
$\lvert\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\rvert$		
$=\sqrt{(-5)^2+(-10)^2+(-10)^2}$		
$=15$		
一垂直於 Π 的單位向量		
$=\dfrac{\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}}{\lvert\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\rvert}$	1M	
$=\dfrac{-1}{3}\mathbf{i}-\dfrac{2}{3}\mathbf{j}-\dfrac{2}{3}\mathbf{k}$	1A	接受 $\dfrac{1}{3}\mathbf{i}+\dfrac{2}{3}\mathbf{j}+\dfrac{2}{3}\mathbf{k}$
(ii) 留意 $\overrightarrow{CD}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 。		
設 $\mathbf{n}=\dfrac{-1}{3}\mathbf{i}-\dfrac{2}{3}\mathbf{j}-\dfrac{2}{3}\mathbf{k}$ 。		
$\overrightarrow{CD}\cdot\mathbf{n}$		
$=(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\left(\dfrac{-1}{3}\mathbf{i}-\dfrac{2}{3}\mathbf{j}-\dfrac{2}{3}\mathbf{k}\right)$		
$=\dfrac{-1}{3}-2-\dfrac{2}{3}$	1M	
$=-3$		
設 θ 為 CD 與 Π 間的交角。		
由於 $\overrightarrow{CD}\cdot\mathbf{n}<0$ ， $\overrightarrow{CD}$ 與 $\mathbf{n}$ 間的交角為 $\dfrac{\pi}{2}+\theta$ 。		
$\overrightarrow{CD}\cdot\mathbf{n}=\lvert\overrightarrow{CD}\rvert\lvert\mathbf{n}\rvert\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$	1M	
$3=\sqrt{1^2+3^2+1^2}\sin\theta$		
$\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$		
$\theta=\sin^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{11}}{11}\right)$	1A	
因此， CD 與 Π 間的交角為 $\sin^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{11}}{11}\right)$ 。		

解	分	備註
(iii) $\overrightarrow{DE}$ $=(\overrightarrow{DC}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$	1M	
$=(3)\left(\frac{-1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$　　(藉 (b)(ii)) $=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$		
$\overrightarrow{PF}$ $=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ $=(-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})+(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})+(\mathbf{i}+4\mathbf{k})$ $=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$		
$\overrightarrow{FD}$ $=\overrightarrow{OD}-(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PF})$ $=(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k})-((\mathbf{i}-\mathbf{j})+(3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}))$ $=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$	1M	
所以，可得 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FD}$ 。 故此，可得 $DE // FD$ 且 $DE=DF$ 。 由此，D、E 與 F 共線且 $DE=DF$ 。 因此，D 為連接 E 與 F 的線段的中點。	1A+1A ---------(10)	必須顯示理由