

數學 延伸部分 單元二（代數與微積分）

試題答題簿

本試卷必須用中文作答
兩小時三十分鐘完卷（上午八時三十分至上午十一時）

考生須知

1. 宣布開考後，考生須首先在第1頁之適當位置填寫考生編號，並在第1、3、5及7頁之適當位置貼上電腦條碼。
2. 本試卷分甲、乙兩部。試卷內各題均須作答。
3. 甲部的答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
4. 乙部的答案須寫在DSE(B)答題簿內。每題（非指分題）必須另起新頁作答。
5. 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每一紙張均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於簿內。
6. 完考時，試題答題簿及答題簿須分開交回。
7. 除特別指明外，所有算式須詳細列出。
8. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值表示。
9. 試題雖用黑體字母如 $\mathbf{u}$ 表示向量，惟考生答題時應採用適當符號如 $\vec{u}$ 。
10. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
11. 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號

參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

甲部 (50 分)

本部答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。

1. 設 $f(x) = e^{2x}$ 。從基本原理解求 $f'(0)$ 。

(3 分)

2. 已知

$$(1+ax)^n = 1+6x+16x^2 + \text{包含 } x \text{ 較高冪的項,}$$

其中 n 為正整數, a 為常數。求 a 和 n 的值。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 以數學歸納法證明對任意正整數 n ,

$$1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 8 + \cdots + n(3n-1) = n^2(n+1)。$$

(5 分)

4. (a) 求 $\int \frac{x+1}{x} dx$ 。

(b) 利用代換 $u = x^2 - 1$, 求 $\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx$ 。

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 求 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ 的圖像上的極小點及漸近線。

(6 分)

6.

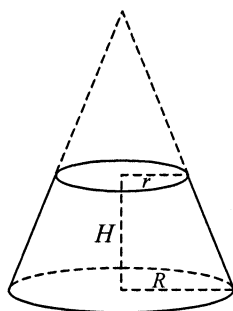


圖 1

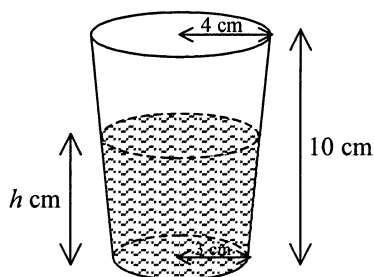


圖 2

一個底半徑為 R 的直立圓錐體切去一個底半徑為 r 的直立圓錐體，從而得到一個高度為 H 的平截頭體（見圖 1）。已知該平截頭體的體積為 $\frac{\pi}{3}H(r^2 + rR + R^2)$ 。

有一隻空的玻璃杯，其形狀為上述的倒置平截頭體，高度為 10 cm，杯的邊緣和底的半徑分別為 4 cm 和 3 cm。現把水倒入杯中。設 h cm ($0 \leq h \leq 10$) 為於時間 t s 時杯中水的深度（見圖 2）。

- (a) 證明於時間 t s 時杯中水的體積 V cm³ 可用下式算出：

$$V = \frac{\pi}{300}(h^3 + 90h^2 + 2700h)。$$

- (b) 若杯中水的體積以速率 7π cm³s⁻¹ 遞增，求在 $h = 5$ 時水深的遞增速率。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

7.

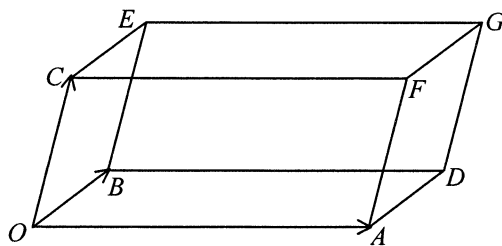


圖 3

圖 3 顯示平行六面體 $OADBECFG$ 。設 $\overrightarrow{OA} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ， $\overrightarrow{OB} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ 及 $\overrightarrow{OC} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 。

- (a) 求平行四邊形 $OADB$ 的面積。
 (b) 求點 C 與平面 $OADB$ 之間的距離。

(5 分)

8. (a) 解以下線性方程組：

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 6 \end{cases}$$

- (b) 利用(a)，或用其他方法，解以下線性方程組：

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 6 \\ x - y + \lambda z = 4 \end{cases}, \text{ 其中 } \lambda \text{ 為常數。}$$

(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. (a) 利用分部積分法，求 $\int x \sin x dx$ 。
(b)

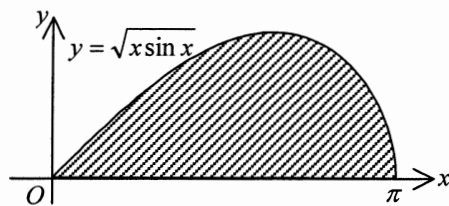


圖 4

圖 4 顯示由曲線 $y = \sqrt{x \sin x}$ (其中 $0 \leq x \leq \pi$) 和 x 軸圍成的陰影區域。求把該區域繞 x 軸旋轉所成立體的體積。

(4 分)

10.

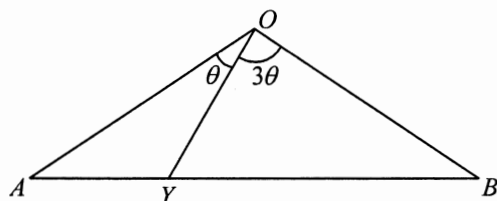


圖 5

在圖 5 中， OAB 為等腰三角形，其中 $OA = OB$ ， $AB = 1$ ， $AY = y$ ， $\angle AOY = \theta$ 及 $\angle BOY = 3\theta$ 。

(a) 證明 $y = \frac{1}{4} \sec^2 \theta$ 。

(b) 求 y 值的範圍。

[提示：考生可利用恆等式 $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ 。]

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50 分)

本部答案須寫在 DSE(B) 答題簿內。

11. (a) 解方程

$$\begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \text{ ----- } \text{-----} (*)。$$

(2 分)

(b) 設 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 為 (*) 的根。設 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$ 。已知

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad |P| = 1,$$

其中 a, b 及 c 為常數。

(i) 求 P 。

(ii) 計算 $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} P$ 。

(iii) 利用(b)(ii)，計算 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{12}$ 。

(11 分)

12.

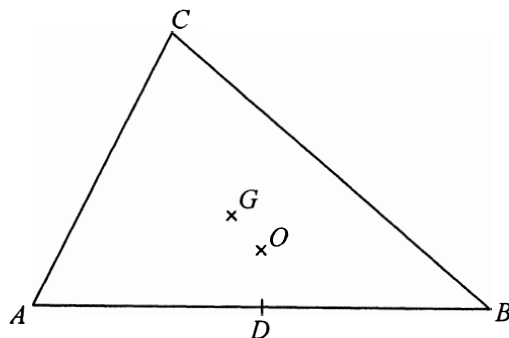


圖 6

圖 6 顯示一個不等邊銳角三角形 ABC ，其中 D 為 AB 的中點， G 為形心， O 為外心。設 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ 和 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ 。

(a) 以 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{c}$ 表 $\overrightarrow{AG}$ 。

(3 分)

(b) 已知 E 是 AB 上一點使得 CE 為頂垂線。將 OG 延長，使與 CE 相交於 F 。

(i) 證明 $\triangle DOG \sim \triangle CFG$ 。

由此求 $FG:GO$ 。

(ii) 證明 $\overrightarrow{AF} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 。

由此證明 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

(9 分)

13. (a) (i) 設 $\tan u = \frac{-1 + \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}}$ ，其中 $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ 。

證明 $u = \frac{-\pi}{5}$ 。

(ii) 設 $\tan v = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}}$ 。

求 v ，其中 $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ 。

(4 分)

(b) (i) 將 $x^2 + 2x \cos \frac{2\pi}{5} + 1$ 表示為 $(x+a)^2 + b^2$ 的形式，其中 a 和 b 為常數。

(ii) 計算 $\int_{-1}^1 \frac{\sin \frac{2\pi}{5}}{x^2 + 2x \cos \frac{2\pi}{5} + 1} dx$ 。

(6 分)

(c) 計算 $\int_{-1}^1 \frac{\sin \frac{7\pi}{5}}{x^2 + 2x \cos \frac{7\pi}{5} + 1} dx$ 。

(3 分)

14. 考慮曲線 $\Gamma: y = kx^p$ ，其中 $k > 0$ ， $p > 0$ 。在圖 7 中， Γ 於 $A(a, ka^p)$ 的切線與 x 軸相交於 $B(-a, 0)$ ，其中 $a > 0$ 。

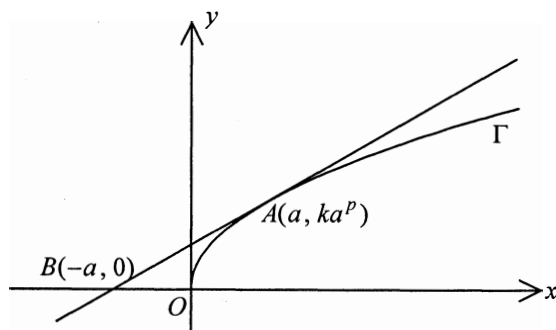


圖 7

- (a) 證明 $p = \frac{1}{2}$ 。

(3 分)

- (b) 設 $a = 1$ 。如圖 8 所示，圓 C 與 Γ 相切於點 A 。圓 C 的半徑為 2，其圓心在 y 軸上。

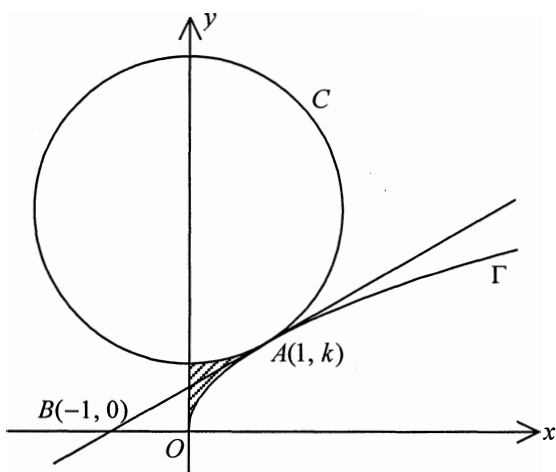


圖 8

- (i) 證明 $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

- (ii) 求由 Γ 、 C 及 y 軸所圍成陰影區域的面積。

(9 分)

試卷完