

香港考試及評核局

2 0 1 4 年 香 港 中 學 文 憑 考 試

**數學 延伸部分**  
**單元一（微積分與統計）**

**試題答題簿**

本試卷必須用中文作答  
兩小時三十分鐘完卷（上午八時三十分至上午十一時）

**考生須知**

1. 宣布開考後，考生須首先在第 1 頁之適當位置填寫考生編號，並在第 1、3、5、7、9、11、13 及 15 頁之適當位置貼上電腦條碼。
2. 試卷內各題**均須作答**。答案須寫在本試題答題簿中預留的空位內。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。
3. 如有需要，可要求派發方格紙及補充答題紙。每一紙張均須填寫考生編號、填畫試題編號方格、貼上電腦條碼，並用繩縛於**簿內**。
4. 除特別指明外，所有算式須詳細列出。
5. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。
6. 就定積分而言，不接受用計算機的數值積分功能求得的答案。
7. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。
8. 試場主任宣布停筆後，考生不會獲得額外時間貼上電腦條碼及填畫試題編號方格。

請在此貼上電腦條碼

考生編號



甲部 (50分)

1. 一個球狀的氣球正以每秒  $100 \text{ cm}^3$  的恆速漏氣。求氣球半徑為  $10 \text{ cm}$  時氣球半徑的變率。  
(3分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

2. 設  $f(x) = \frac{x^x}{(2x+13)^6}$ ，其中  $x > 1$ 。

(a) 通過考慮  $\ln f(x)$ ，求  $f'(x)$ 。

(b) 對  $x > 1$  證明  $f(x)$  遞增。

(6分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

3. 某曲線  $S$  於其上任意點  $(x, y)$  的切線斜率可表示為  $\frac{dy}{dx} = \left(2x - \frac{1}{x}\right)^3$ ，其中  $x > 0$ 。

點  $P(1, 5)$  位於  $S$  上。

(a) 求  $S$  於  $P$  的切線方程。

(b) (i) 展開  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^3$ 。

(ii) 對  $x > 0$  求  $S$  的方程。

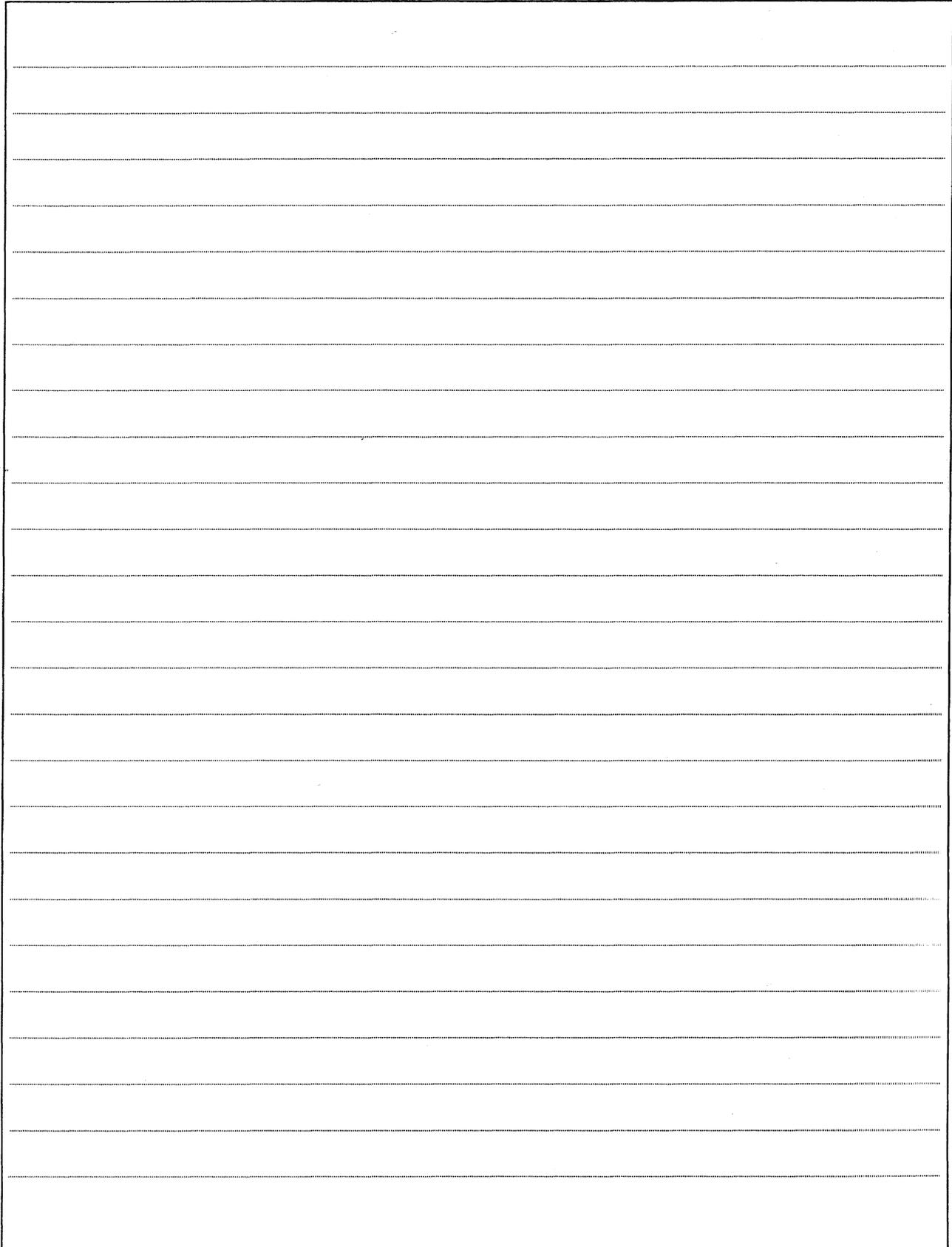
(7分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 求以下定積分的值：

(a)  $\int_1^3 \frac{t+2}{t^2+4t+11} dt$  ,

(b)  $\int_1^3 \frac{t^2+3t+9}{t^2+4t+11} dt$  。

[註：就定積分而言，不接受用計算機的數值積分功能求得的答案。]

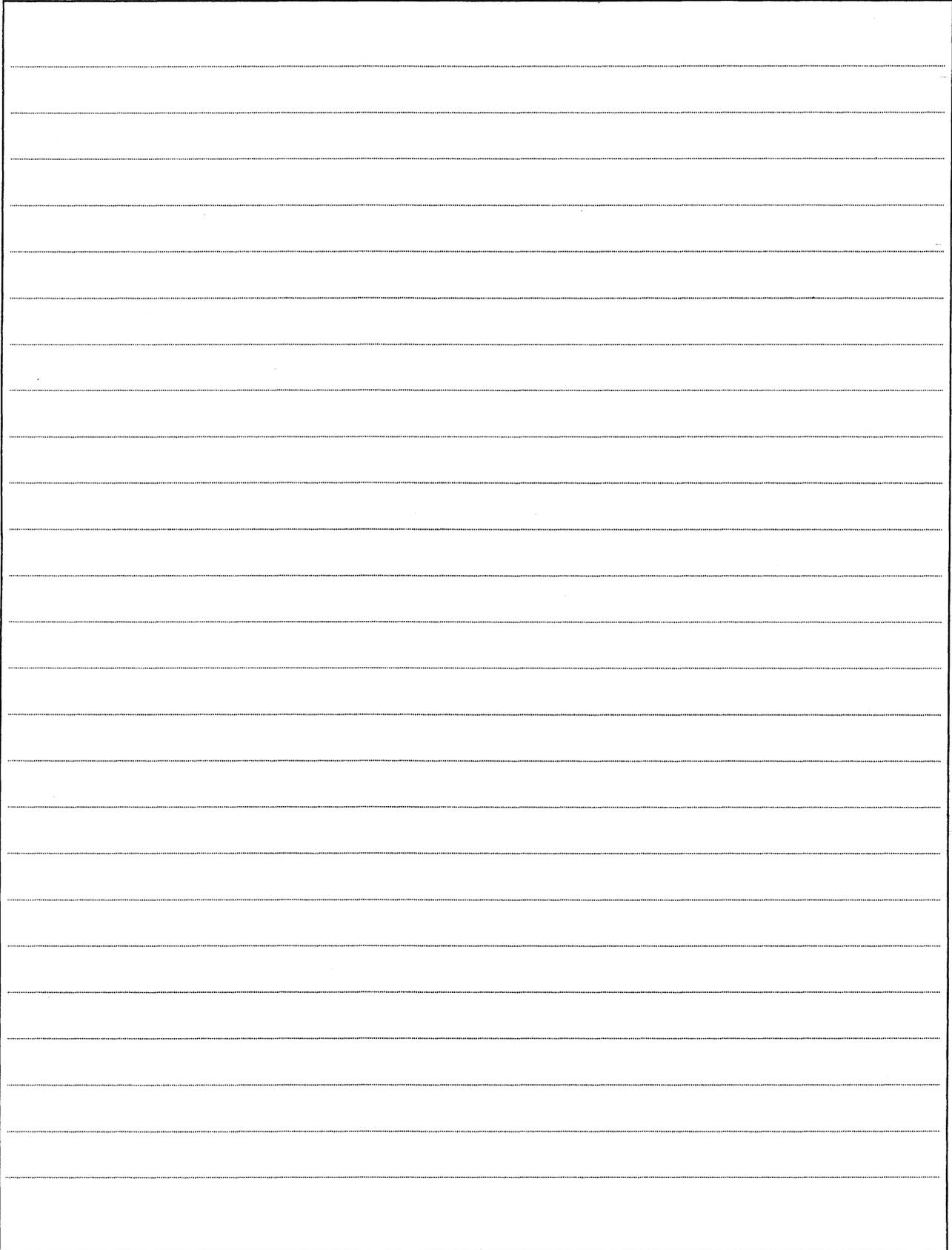
(6分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

5. 某國政府擬公佈一項為期 3 年的新入境政策。在公佈政策時，該國的人口為 8 百萬。在公佈政策後，該國人口的變率可用下式模擬：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t\sqrt{9-t^2}}{3} \quad (0 \leq t \leq 3),$$

其中  $x$  是該國的人口（以百萬為單位）， $t$  是自公佈政策起經過的時間（以年為單位）。求  $x$ ，答案以  $t$  表示。

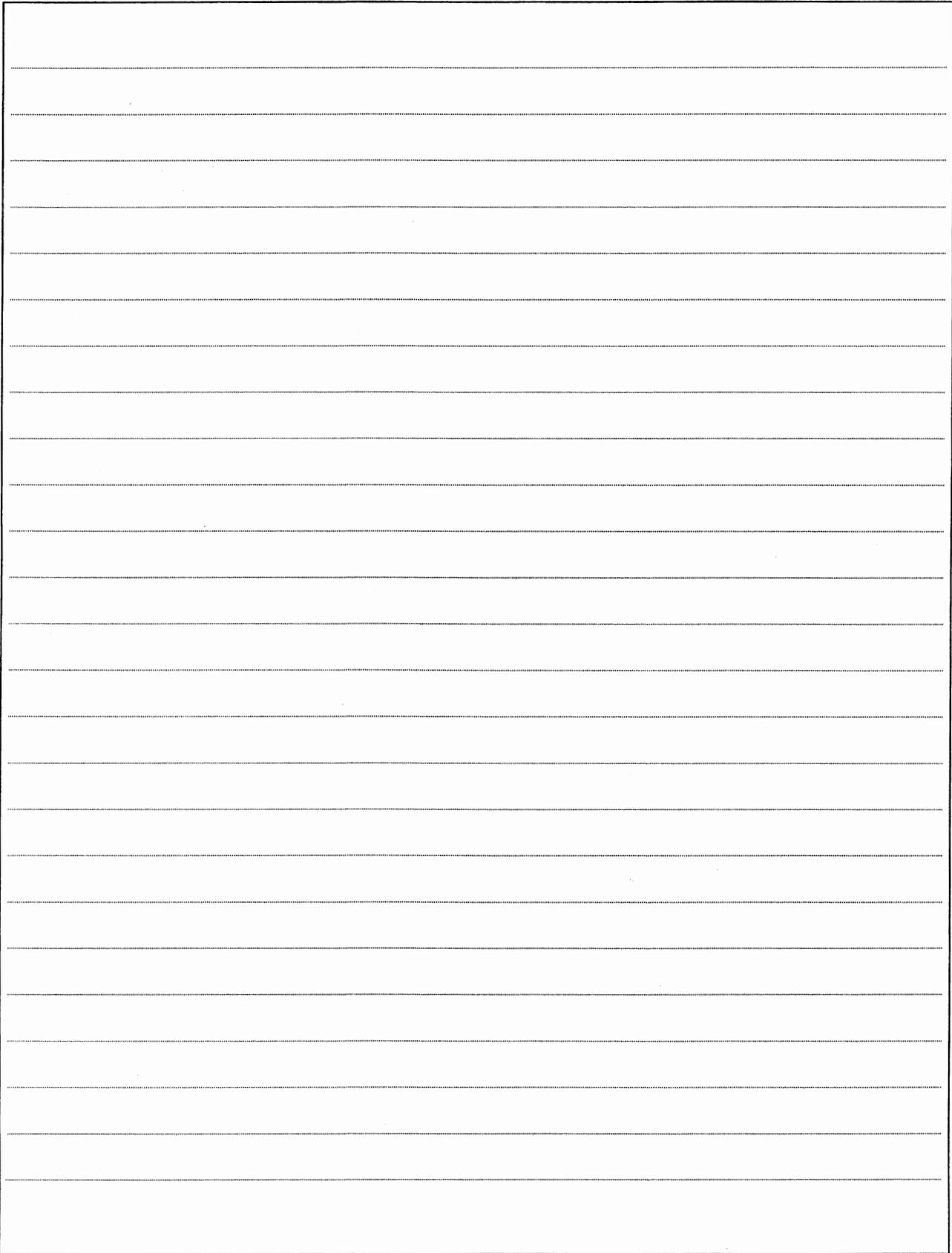
(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

6. 設  $X$  為離散隨機變量，其概率函數如下表所示。

|          |     |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| $x$      | $k$ | 0   | 4   | 6   |
| $P(X=x)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

已知  $E(X)=3.4$ 。

- (a) 求  $k$  的值。
- (b) 求  $\text{Var}(3-4X)$ 。
- (c) 設  $G$  為事件  $X < 4$ ， $H$  為事件  $X \geq -1$ 。求  $P(G \cap H)$ 。

(5分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼

7. 設  $A$  和  $B$  為兩個事件，且  $P(A|B)=0.4$ ， $P(A \cup B)=0.45$  和  $P(B')=0.75$ ，其中  $B'$  與  $B$  為互補事件。

(a) 求  $P(A \cap B)$  和  $P(A)$ 。

(b) 事件  $A$  與  $B$  是否相互獨立？解釋如何達至你的答案。

(6分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

8. 某公司以生產線  $A$  和  $B$  生產微波爐。已知在所有微波爐中有 4% 不能正常運作，並且在由生產線  $A$  生產的微波爐中有 2% 不能正常運作。在能正常運作的微波爐中，有  $\frac{2}{3}$  是由生產線  $B$  生產的。假設隨機選取一個微波爐。

- (a) 求該微波爐由生產線  $B$  生產且能正常運作的概率。
- (b) 求該微波爐由生產線  $A$  生產的概率。
- (c) 若該微波爐是由生產線  $B$  生產的，求該微波爐能正常運作的概率。

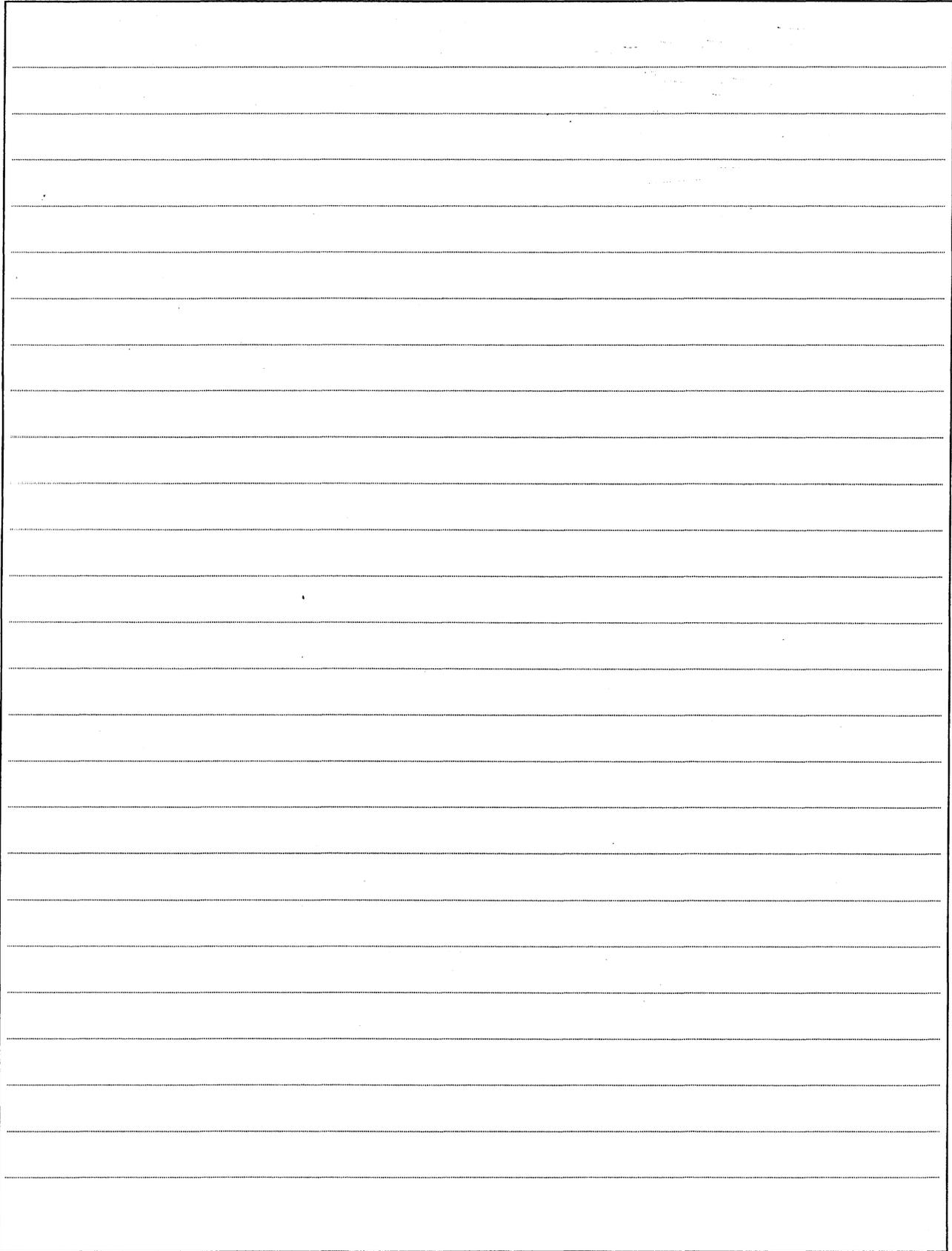
(5 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

9. 某健身中心的經理欲推廣健康舞班。

- (a) 該名經理隨機選取了 200 名香港居民，發現他們之中有 80 人曾參加健康舞班。設  $p$  為曾參加健康舞班的人在香港居民中所佔的比例。求  $p$  的近似 95% 置信區間。
- (b) 該名經理現欲隨機選取  $n$  名香港居民，並邀請他們參加免費健康舞班。一名獲邀居民會出席免費健康舞班的概率為 0.85。設  $X$  為該  $n$  名獲邀居民中會出席免費健康舞班的比例。假設  $X$  可用平均值為 0.85 及方差為  $\frac{0.85(1-0.85)}{n}$  的正態分佈模擬。求  $n$  的最大值使超過 100 名獲邀居民會出席免費健康舞班的概率小於 0.05。

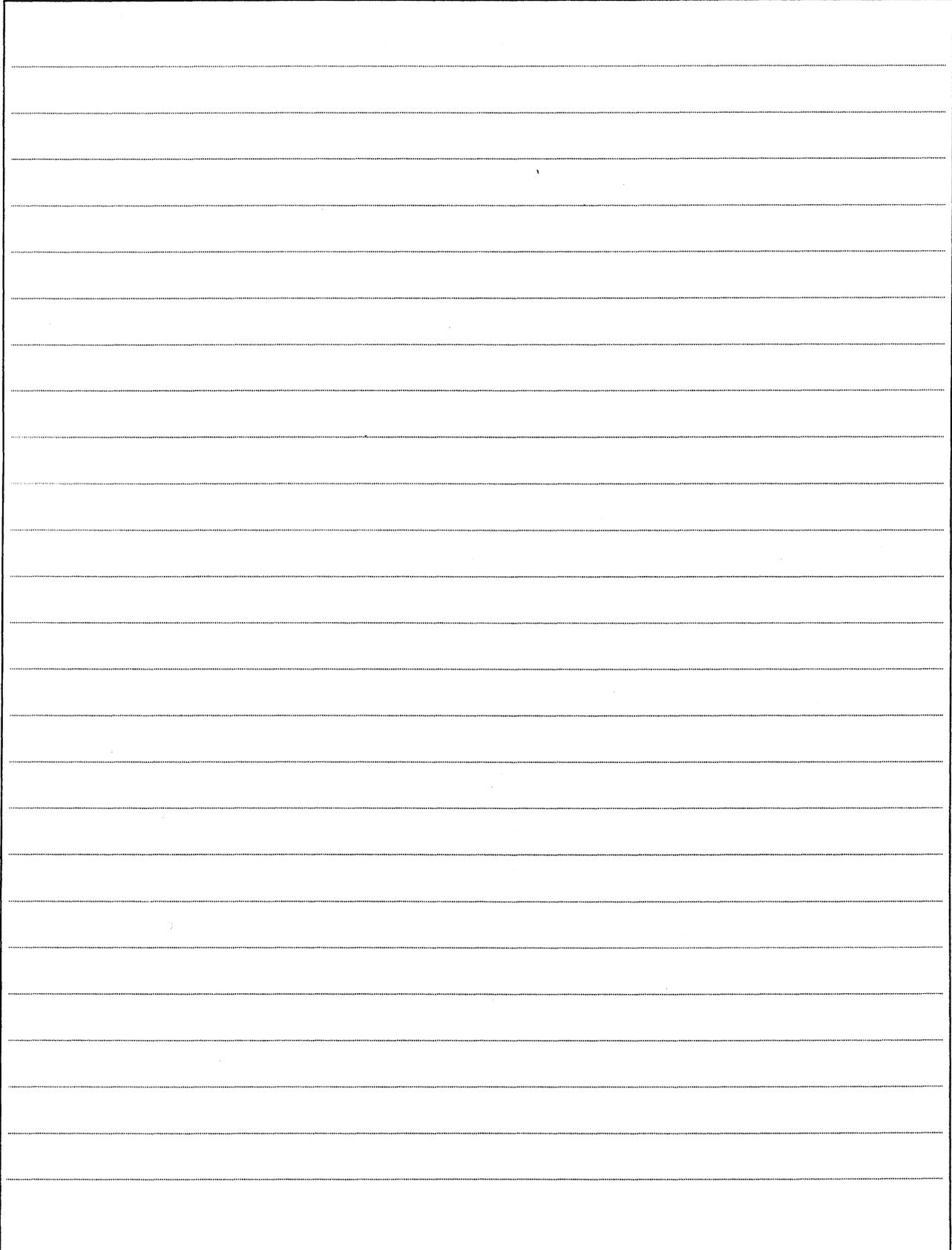
(7 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

請在此貼上電腦條碼



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

乙部 (50分)

10. (a) (i) 求  $\frac{d}{dv}(ve^{-v})$ 。

(ii) 利用(a)(i)或其他方法，證明  $\int ve^{-v} dv = -e^{-v}(1+v) + C$ ，其中  $C$  是常數。

(3分)

(b)

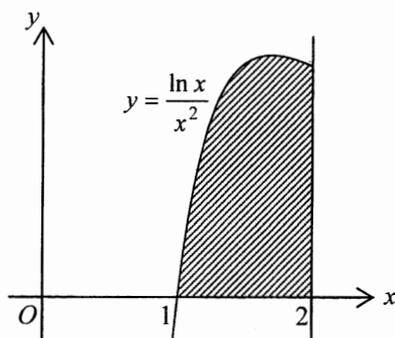


圖 1

圖 1 顯示由曲線  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ 、直線  $x = 2$  和  $x$  軸圍成的陰影區域。利用適當的代換和(a)的結果，證明陰影區域的面積為  $\frac{1 - \ln 2}{2}$ 。

(5分)

(c) (i) 求  $\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\ln x}{x^2} \right)$ 。

(ii) 利用(b)和(c)(i)，證明

$$\frac{\ln 1.1}{1.1^2} + \frac{\ln 1.2}{1.2^2} + \frac{\ln 1.3}{1.3^2} + \dots + \frac{\ln 1.9}{1.9^2} < 5 - \frac{41}{8} \ln 2。$$

(6分)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dotted lines for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, leaving a margin at the top and bottom.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

11. 設  $y$  為某實驗室內懸浮粒子的數量（採用適當的單位）。已知

$$(E): y = \frac{340}{2 + e^{-t} - 2e^{-2t}} \quad (t \geq 0),$$

其中  $t$  是自某實驗開始起經過的時間（以小時為單位）。

(a) 經過一段長時間後， $y$  的值將會超過 171 嗎？解釋如何達至你的答案。(2 分)

(b) 求  $y$  的最大值和最小值。(6 分)

(c) (i) 把 (E) 改寫為以  $e^{-t}$  為變量的二次方程。

(ii) 已知在時刻  $t = \alpha$  和  $t = 3 - \alpha$  時懸浮粒子的數量相同。給定  $0 \leq \alpha < 3 - \alpha$ ，求  $\alpha$ 。(4 分)

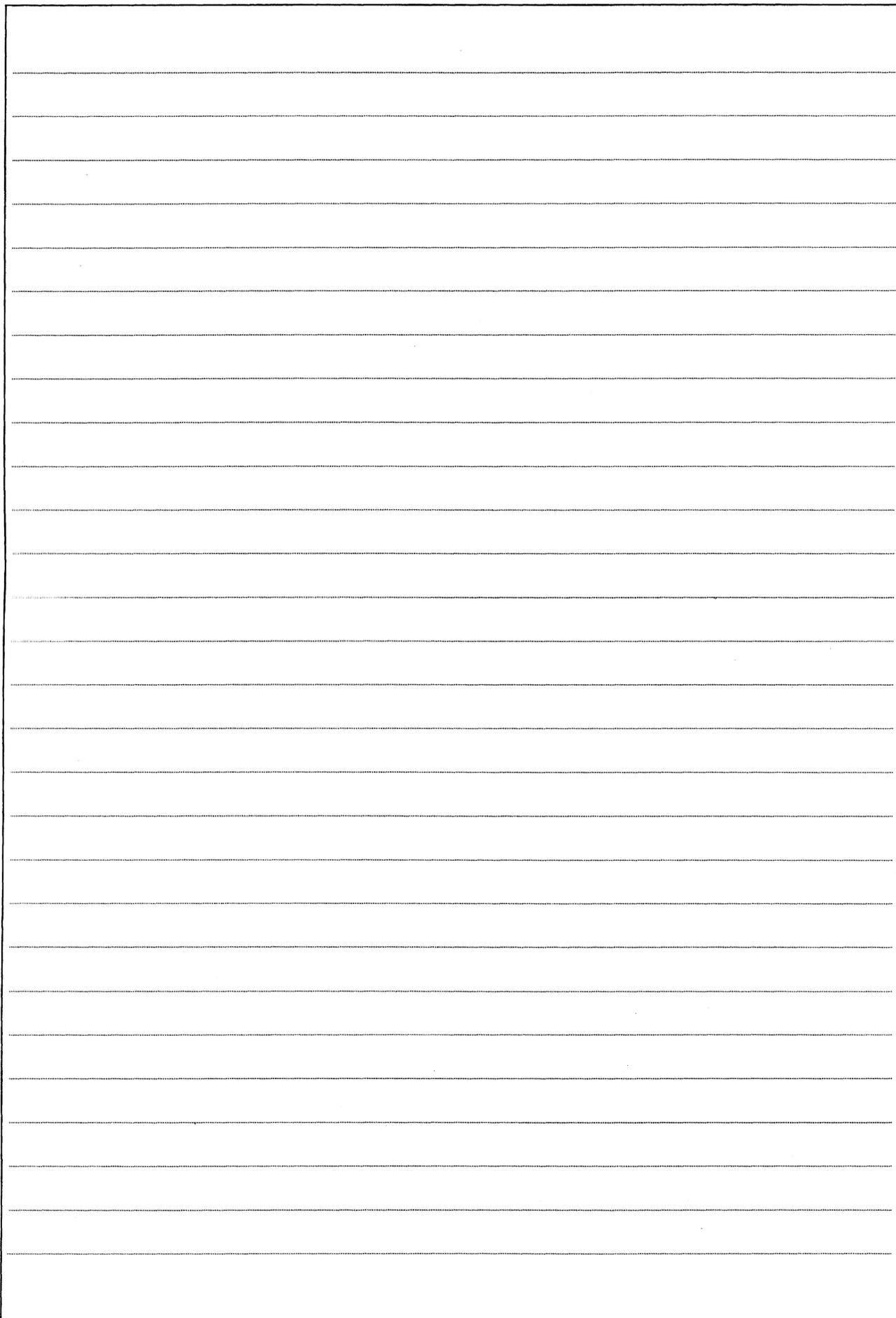
寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。



寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

12. 在某薄餅店，一份訂單的送貨時間  $X$ （以分鐘為單位）服從正態分佈，其平均值為  $\mu$ ，標準差為  $\sigma$ 。已知有 27.43% 的送貨時間超過 25 分鐘，並有 51.60% 的送貨時間與  $\mu$  相差不超過 3.5 分鐘。

(a) 求  $\mu$  和  $\sigma$ 。

(4 分)

(b) 若某顧客的訂單的送貨時間超過  $k$  分鐘，薄餅店便會向該顧客送出一張優惠券作為補償。假設某天共接獲 200 份訂單。假設不同訂單的送貨時間相互獨立，求  $k$  的最小整數值使當天送出的優惠券數目的期望值不超過 5。

(3 分)

(c) 該薄餅店的僱員最近接受培訓以提高效率。經培訓後，一份訂單的送貨時間  $Y$ （以分鐘為單位）服從正態分佈，其平均值為  $\theta$ ，標準差為 4.7。

(i) 經理  $A$  隨機選取 12 份訂單組成一樣本，並記錄其送貨時間（以分鐘為單位）如下：

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 22 | 15 | 18 | 21 | 22 | 31 |
| 20 | 16 | 21 | 19 | 23 | 24 |

求  $\theta$  的 90% 置信區間。

(ii) 經理  $B$  將要隨機選取  $n$  份訂單組成另一樣本。他要求該  $n$  份訂單的平均送貨時間與  $\theta$  相差不超過 3 分鐘的概率大於 0.99。求能符合其要求的  $n$  的最小值。

(6 分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dashed lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

13. 某鐵路系統一日內的誤點次數服從平均值為 4.8 的泊松分佈。假設不同日子的誤點次數相互獨立。

(a) 求某日內的誤點次數不超過 3 的概率。 (2分)

(b) 求連續 3 日內最多有 2 日的每日誤點次數不超過 3 的概率。 (2分)

(c) 如某日的誤點次數超過 5，便稱當日為不*理想日*，否則稱當日為*理想日*。

(i) 假設今日是不*理想日*。求在今日和下一個不*理想日*之間的*理想日*的平均數。

(ii) 求某星期的最後一日是該星期內第三個不*理想日*的概率。

(iii) 求在某星期內連續出現至少 4 個不*理想日*的概率。 (7分)

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

A large rectangular area with horizontal dashed lines, intended for writing answers. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page.

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

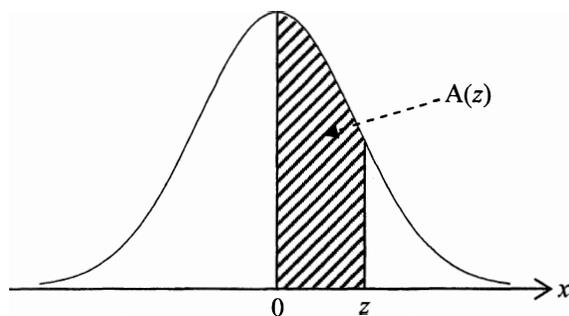
**試卷完**

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

### 標準正態分佈表

| z   | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2257 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2517 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2611 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7 | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8 | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706 |
| 1.9 | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4756 | .4761 | .4767 |
| 2.0 | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4803 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1 | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2 | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3 | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4 | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5 | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6 | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7 | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4972 | .4973 | .4974 |
| 2.8 | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9 | .4981 | .4982 | .4982 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0 | .4987 | .4987 | .4987 | .4988 | .4988 | .4989 | .4989 | .4989 | .4990 | .4990 |
| 3.1 | .4990 | .4991 | .4991 | .4991 | .4992 | .4992 | .4992 | .4992 | .4993 | .4993 |
| 3.2 | .4993 | .4993 | .4994 | .4994 | .4994 | .4994 | .4994 | .4995 | .4995 | .4995 |
| 3.3 | .4995 | .4995 | .4995 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4997 |
| 3.4 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4997 | .4998 |
| 3.5 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 | .4998 |

註：本表所列數字為標準正態曲線下由  $x=0$  至  $x=z$  ( $z \geq 0$ ) 之間的面積。  
負值  $z$  所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$